ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Hoja 10. CÓNICAS.

1. Dada una circunferencia de centro C y radio r y un punto A exterior a ella, se considera cualquier recta s que pasa por A y que corta a la circunferencia en dos puntos P y P'. Demuestra que $\|\vec{AP}\|\|\vec{AP'}\| = \|\vec{AC}\|^2 - r^2$.

(*Nota*: $\|\vec{AP}\|\|\vec{AP'}\|$ se denomina *potencia* del punto A con respecto a la circunferencia dada. Este ejercicio muestra que la potencia del punto A no depende de la recta s.)

2. Considera la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con $a > b$ y la circunferencia de de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$. Sea $S = (x, 0)$ con $-a < x < a$. Sean P y P' los puntos de corte de la perpendicular al eje OX que pasa por S con la elipse y la circunferencia respectivamente. Demuestra que

$$\frac{\|\vec{P'S}\|}{\|\vec{PS}\|} = \frac{a}{b}\,.$$

3. Una circunferencia del plano pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 5)$ y tiene el centro sobre la recta $x + 2y = 3$. Halla su ecuación, su centro y su radio.

4. Encuentra las ecuaciones de las parábolas de focos $(1, a)$ y vértices (a, a) donde $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Demuestra que sólo hay un valor de a para el cual la parábola correspondiente pasa por el origen.

5. Encuentra las ecuaciones de las las elipses de focos $(0, \mu)$ y $(-\mu, 2)$ y semieje mayor $\sqrt{2}$, donde $\mu \in \mathbb{R}$. Demuestra que existen dos elipses de la familia que pasan por el origen.

6. Halla la ecuación de la hipérbola que tiene un foco en el punto $(2, -1)$ y sus asíntotas son las rectas $x = 0$ y $3x - 4y = 0$.

7. Clasifica (y da las ecuaciones del movimiento de $\mathbb{R}^2$ que las llevan a su forma canónica) las siguientes cónicas:

a) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.

b) $2x - 2x^2 + y^2 + 4xy - 1 = 0$.

c) $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 3 = 0$.

8. Clasifica las cónicas de ecuación

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \alpha y^2 + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0$$

para los distintos valores de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

9. En el sistema de referencia ortonormal usual, considera la cónica de ecuación

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0.$$

a) Determina el tipo de cónica y decide si es degenerada o no.

b) Encuentra un sistema de referencia ortonormal respecto al que la ecuación de la cónica sea canónica.

c) Describe los elementos geométricos de la cónica (centro, ejes, focos, asíntotas, directriz) respecto al sistema de referencia usual.

10. Clasifica la cónica de ecuación $x^2 - xy + y^2 - 3x - 2 = 0$. Determina su(s) foco(s) y su eje principal con respecto al sistema de referencia usual.

11. Consideremos el plano afín $A^2_{\mathbb{R}}$ con el sistema de referencia habitual. Clasifica la cónica de ecuación

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2/3 = 0$$

y *describe* sus elementos geométricos (centro, focos, ejes, directriz, asíntotas) siempre con respecto al sistema de referencia habitual.