# ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

**Hoja 0**. Repaso de Álgebra lineal

**1.** Sean $F := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0, z + t = 0\}$ y $G$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1)\}$.

i) Demuestra que $F$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

ii) Calcula una base de $F$ y su dimensión.

iii) ¿Cuál es el mínimo número de ecuaciones lineales homogéneas que necesitamos para describir $G$? Da un ejemplo de sistema lineal homogéneo cuyo conjunto de soluciones sea $G$. ¿Es este sistema único con esta propiedad?

iv) Calcula una base del subespacio $F + G$.

v) Describe el subespacio $F \cap G$ de dos maneras distintas.

vi) Comprueba que se verifica la fórmula de Grassman sobre las dimensiones de los subespacios que aparecen en el problema.

**2.** Dados los subespacios $U = \{(a, b, c, d) : b+c+d = 0\}$ y $V = \{(a, b, c, d) : a+b = 0, \ c = 2d\}$ de $\mathbb{R}^4$, determina una base y la dimensión de $U, \ V, \ U + V$ y $U \cap V$.

**3.** Consideremos los vectores $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ y una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \quad \text{y} \quad f(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2. \tag{1}$$

i) Demuestra que $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

ii) Decide, razonadamente, si $f$ está completamente determinada por las condiciones descritas en (1).

iii) Escribe la matriz de $f$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

iv) Calcula la imagen de $(1, 3)$ por $f$.

v) Sea $(a, b)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Calcula su imagen por $f$ y expresa sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$.

vi) Usando el apartado anterior, calcula las imágenes por $f$ de los vectores de la base canónica.

vii) Describe geométricamente el efecto que tiene aplicar $f$ a un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$.

**4.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (0, x - 2y + z).$$

i) Halla la matriz de $f$ en la base canónica.

ii) Calcula el núcleo e imagen de $f$, bases y dimensiones respectivas.

iii) Halla la matriz de la aplicación $f$ respecto de las bases $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, y $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

**5.** Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Describe las imágenes por $g$ de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

ii) ¿Cuál es la dimensión de la imagen de $g$? ¿Es $g$ inyectiva?

iii) Describe la imagen de $g$: fijado un vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, da condiciones necesarias y suficientes para que $(a, b, c)$ esté en la imagen de $g$.

iv) Describe los subespacios invariantes por $g$.

**6.** Calcula los valores de $a, b, c$ y $d$ sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & d \\ 2 & b & -2 \\ 3 & c & 3 \end{pmatrix}$$

admite como autovectores a $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, -1)$.

**7.** Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\vec{x} = \vec{0}. \tag{2}$$

Contesta de manera razonada a las siguientes preguntas *sin hacer ningún cálculo*:

i) Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada está dada por $C$. Al resolver el sistema de ecuaciones (2), ¿qué información obtenemos sobre $h$?

ii) ¿Qué información nos da el número de soluciones del sistema (2) sobre los vectores columna de $C$?

iii) Sea ahora $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Observa que $C\vec{x} = (a, b, c)^t$ se puede escribir como

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{3}$$

¿Qué significa, en términos de $h$, que el sistema (3) tenga o no solución?

iv) ¿Qué significa, en términos de los vectores columna de $C$, que el sistema (3) tenga o no solución?