

Ejemplos de máximos y mínimos

Para cada una de las funciones que se dan a continuación vamos a buscar sus puntos críticos y ver cuáles de éstos son máximo o mínimo, local o global.

1. $f_1(x, y) = xy e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

Para abreviar, escribiremos $E = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Calculamos:

$$f_{1x} = (y - x^2y)E \quad , \quad f_{1y} = (x - xy^2)E .$$

Los puntos críticos de f_1 pueden determinarse por el sistema

$$\left. \begin{aligned} (1 - x^2)y &= 0 \\ (1 - y^2)x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuyas soluciones son los cinco puntos $(0, 0)$ y $(\pm 1, \pm 1)$. También calculamos:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f_1) &= E \cdot \begin{bmatrix} -3xy + x^3y & 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 \\ 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 & -3xy + xy^3 \end{bmatrix} = \\ &= E \cdot \begin{bmatrix} (x^2 - 3)xy & (1 - x^2)(1 - y^2) \\ (1 - x^2)(1 - y^2) & (y^3 - 3)xy \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Evaluando la hessiana en los cinco puntos, se obtienen:

$$(0, 0) \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{silla no degenerada}$$

$$(1, 1) \quad , \quad e^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & \\ & -2 \end{bmatrix} \quad \text{máximo local no degenerado}$$

$$(1, -1) \quad , \quad e^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix} \quad \text{mínimo local no degenerado}$$

$$(-1, 1) \quad , \quad e^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix} \quad \text{mínimo local no degenerado}$$

$$(-1, -1) \quad , \quad e^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & \\ & -2 \end{bmatrix} \quad \text{máximo local no degenerado}$$

Hasta aquí el estudio local, es decir cerca de cada punto crítico.

Para el estudio global, empezamos observando que, debido al factor exponencial, se tiene:

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f_1(x, y) = 0 .$$

Por otra parte $f_1(1, 1) = f(-1, -1) = e^{-1}$ es positivo y $f_1(-1, 1) = f_1(1, -1) = -e^{-1}$ es negativo. Esto implica que para todo radio $r > \sqrt{2}$ se tiene que $(1, 1), (-1, -1)$ son máximos, y $(-1, 1), (1, -1)$ mínimos, de f_1 en $B((0, 0), r)$. Luego los dos máximos locales son también globales y los dos mínimos locales son también globales.

2. $f_2(x, y) = x^4 + x^2y^2 + 3y^2 - 2y^3$

Calculamos:

$$f_{2x} = 4x^3 + 2xy^2 \quad , \quad f_{2y} = 2x^2y + 6y - 6y^2 .$$

Los puntos críticos de f_2 son las soluciones del sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x(2x^2 + y^2) &= 0 \\ 2y(x^2 + 3 - 3y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la primera ecuación se deduce que $x = 0$, lo que llevado a la segunda da $2y(3 - 3y) = 0$, luego las soluciones son $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Calculemos también:

$$\text{Hess}(f_2) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 6 - 12y \end{bmatrix}.$$

Evaluable se obtiene:

$$(0, 0) \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{hessiana semidefinida positiva}$$

$$(0, 1) \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{silla no degenerada}$$

El análisis local, sólo con las derivadas primeras y segundas, no permite decidir la naturaleza del punto crítico $(0, 0)$. Para terminar de conocerla es preciso mirar los términos de grados 3 y 4 de la fórmula de f_2 . Consideramos la función de una variable $\varphi_2(y) = 3y^2 - 2y^3$, que tiene un mínimo local no degenerado en $y = 0$. Como $f_2(x, y) = \varphi_2(y) + x^4 + x^2y^2 \geq \varphi_2(y) + x^4$, deducimos fácilmente que $(0, 0)$ es un mínimo local estricto de f_2 , pese a ser degenerado.

Ahora haremos el análisis global. Por supuesto f_2 no tiene máximos globales, porque ni siquiera los tiene locales. Por su parte, el mínimo local $(0, 0)$ no es mínimo global porque $f_2(0, y) \rightarrow -\infty$ cuando $y \rightarrow +\infty$.

3. $f_3(x, y) = x^2 + 4y^3 + 3y^4$

$$\text{Calculamos: } f_{3x} = 2x, \quad f_{3y} = 12y^2 + 12y^3, \quad \text{Hess}(f_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24y + 36y^2 \end{bmatrix}.$$

Determinamos los puntos críticos y evaluamos la hessiana en ellos:

$$(0, 0) \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{hessiana semidefinida positiva}$$

$$(0, -1) \quad , \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{mínimo local no degenerado}$$

Las derivadas primeras y segundas no bastan para decidir qué clase de punto crítico es $(0, 0)$, haciendo necesario mirar los términos de grado mayor en la fórmula de f_3 . Para valores *pequeños* de y se tiene:

$$4y^3 + 3y^4 \begin{cases} > 0 & \text{si } y > 0 \\ < 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

luego arbitrariamente cerca de $(0, 0)$ hay puntos $(0, y)$ en los que f_3 vale más o menos que lo que vale en $(0, 0)$, según que y sea, respectivamente, positivo o negativo. Deducimos que $(0, 0)$ no es máximo local ni mínimo local.

Análisis global. Sabemos que f_3 no tiene máximos globales, porque ni siquiera los tiene locales. Queda por ver si el mínimo local $(0, -1)$ es mínimo global; para ello definimos $\varphi_3(y) = 4y^3 + 3y^4$ y vemos que esta función tiene un mínimo global en $y = -1$. Se sigue que $f_3(x, y) = x^2 + \varphi_3(y)$ tiene un mínimo global en $(0, -1)$.

4. $f_4(x, y, z) = x^4 - 2x^2 + y^2 + x^2z^2 + z^4$

Derivadas primeras: $f_{4x} = 4x^3 - 4x + 2xz^2$, $f_{4y} = 2y$, $f_{4z} = 2x^2z + 4z^3$.

La ecuación $f_{4z} = 0$ puede ponerse como $2z(x^2 + 2z^2) = 0$ y se ve que equivale a $z = 0$. Como la ecuación $f_{4y} = 0$ fuerza $y = 0$, los puntos críticos son de la forma $(x, 0, 0)$. Como la ecuación

$$0 = f_{4x}(x, 0, 0) \equiv 4x^3 - 4x ,$$

tiene las soluciones $x \in \{0, 1, -1\}$, los puntos críticos son $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (-1, 0, 0)$. Además:

$$\text{Hess}(f_4) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 + 2z^2 & 0 & 4xz \\ 0 & 2 & 0 \\ 4xz & 0 & 2x^2 + 12z^2 \end{bmatrix} ,$$

y evaluando se obtiene:

$$(0, 0, 0) , \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \text{ hessiana indefinida, aunque degenerada}$$

$$(\pm 1, 0, 0) , \begin{bmatrix} 8 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \text{ mínimos locales no degenerados}$$

La forma cuadrática $Q(\cdot) = \text{Hess}(f_4)_{(0,0,0)}(\cdot)$ satisface $Q(\mathbf{e}_1) < 0$ y $Q(\mathbf{e}_2) > 0$, luego para ε pequeño se tiene $f_4(\pm\varepsilon, 0, 0) < f_4(0, 0, 0)$ y $f_4(0, \pm\varepsilon, 0) > f_4(0, 0, 0)$. La hessiana *indefinida*, aunque sea degenerada, nos permite decidir que $(0, 0, 0)$ no es ni mínimo local ni máximo local.

La función $\varphi_4(x) = x^4 - 2x^2$ tiene mínimos globales en $x = \pm 1$. Se deduce fácilmente que $f_4(x, y, z) = \varphi_4(x) + y^2 + x^2z^2 + z^4$ tiene mínimos globales en $(\pm 1, 0, 0)$. No tiene máximos globales, porque ni siquiera los tiene locales.

5. $f_5(x, y) = 2x^2 - y^2 - x^4$

Esta función no plantea ninguna dificultad en el análisis local: los puntos críticos son $(0, 0)$, donde la hessiana es indefinida, y $(\pm 1, 0)$, donde la hessiana es definida negativa. Por lo tanto $(0, 0)$ es una silla mientras que los puntos $(\pm 1, 0)$ son máximos locales no degenerados.

Para el análisis global observamos que $f_5(x, y) = -\varphi_4(x) - y^2$ y deducimos que f_5 tiene máximos globales en $(\pm 1, 0)$.

6. $f_6(x, y) = x + x^2y + xy^2$

Esta función tiene solamente dos sillars y las dos son no degeneradas (compruébalo). Sus curvas de nivel tienen la siguiente forma:

