HOJA EXTRA DE EJERCICIOS
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. Explica cómo hacer con muy pocos cálculos el ejemplo 1 del apartado 6.13 de los apuntes, haciendo uso del teorema de Stokes.

Problema 2. Halla la frontera y la normal exterior de cada uno de los siguientes dominios suaves:

a) $\{x \in \mathbb{R}^k : \|Ax\|^2 = r^2\}$, con A matriz $k \times k$ invertible y r una constante positiva.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 1\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < 2x^2 + y^2 < 2\}$.

Problema 3. Sean $S = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad y $U \subseteq \mathbb{R}^3$ cualquier abierto espacial que la contenga. Sea ν la normal unitaria exterior a la bola unidad.
Fijamos el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y la función $\Phi(u, v) : R \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z) \ = \ \Phi(u, v) \ \equiv \ \big(\cos v \cos u \, , \, \cos v \operatorname{sen} u \, , \, \operatorname{sen} v \big) \, .$$

a) Comprueba que Φ parametriza S y es compatible con ν. Aunque Φ no sea del todo regular ni del todo inyectiva, explica por qué $\displaystyle\int_{(S,\nu)} \Omega = \int_{\Phi} \Omega$ para toda 2-forma Ω definida en U.

b) Describe $\partial\Phi$ como un camino poligonal y explica por qué para toda 1-forma ω, definida en U, se cumple la igualdad $\displaystyle\int_{\partial\Phi} \omega = 0$. Concluye que si Ω es una 2-forma exacta en U entonces $\displaystyle\int_S \Omega = 0$.

c) Dada la función $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, comprueba que el campo $\mathbf{F} \equiv r^{-3}\,(x, y, z)$, definido en $U_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, tiene divergencia nula. Deduce, razonadamente, que la correspondiente 2-forma $\Omega = \mathbf{F}^\natural$ es cerrada en U_1 pero no es exacta en nigún abierto que contenga la esfera unidad.

d) Explica por qué no existe ningún campo $\mathbf{G}$, definido en U y que cumpla $\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{F}|_U$.

Problema 4. En cada caso se da un abierto U y una forma diferencial ω en U. Decide si ω es exacta o no en U. Caso de que sea exacta, encuentra una antiderivada exterior.

a) $\omega = (\cos x + e^y)\, dx + (x + e^y)\, dy$ en $U = \mathbb{R}^2$.

b) $\omega = \big(e^{yz} - yz\, e^{yz}\big)\, dx + \big(y^2 + z^2 - xyz^2\, e^{yz}\big)\, dy + \big(2z + 2yz - xy^2 z\, e^{yz}\big)\, dz$ en $U = \mathbb{R}^3$.

c) $\omega = \dfrac{x^2}{x^4 + y^4}\,(xdy - ydx)$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

d) $\omega = \dfrac{xdx + 2y^3 dy}{x^2 + y^4}$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

e) $\omega = \dfrac{(y^2 + z^2)\, dx \wedge dy + xz\, dy \wedge dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ en $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

f) $\omega = \dfrac{x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy}{(x^2 + 5y^2 + z^2)^{3/2}}$ en $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Problema 5. Se dice que dos abiertos $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ son **difeomorfos** si existe un difeomorfismo $\sigma : U \to V$.

a) Demuestra que si U es difeomorfo a un abiero convexo entonces para $k \geq 1$ toda k-forma cerrada en U es exacta en U.

b) Demuestra que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no son difeomorfos.

Problema 6. Se consideran el cilindro $C = \{\,(x,y,z)\,:\,x^2+y^2=1\,,\,0<z<1\,\}$ y la 1-forma ω en $\mathbb{R}^3$ dada por $\omega = \Big(\operatorname{sen}(\pi z)\,e^{x^2+y^4} + y\,e^z\Big)\,dx + z^2\,dy + e^{x+y}\,dz$.

a) Comprueba que $\nu : C \to \mathbb{R}^3$ dada por $\nu(x,y,z) = (x,y,0)$ es una normal unitaria para C.

b) Explica por qué $\Phi : (0,2\pi)\times(0,1) \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, se puede utilizar para calcular $\displaystyle\int_{(C,\nu)} \Omega$ para toda 2-forma Ω. En particular úsala para calcular $\displaystyle\int_{(C,\nu)} d\,\omega$. *(Indicación: describe $\partial\Phi$ como un camino poligonal).*

c) Sean $U = \{\,(u,v)\,:\,1<u^2+v^2<4\,\}$ y $\Psi : U \to \mathbb{R}^3$, $\Psi(u,v) = \left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,,\,\dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,,\,\sqrt{u^2+v^2}-1\right)$. Explica cómo utilizar Ψ para calcular la integral $\displaystyle\int_{(C,\nu} \Omega$ de cualquier 2-forma Ω. En particular úsala para calcular $\displaystyle\int_{(C,\nu)} d\,\omega$.

Problema 7. Sea C el trozo de cilindro $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$ y sean los discos

$$D_0 = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2\le 1,\ z=0\big\}\,, \qquad D_1 = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2\le 1,\ z=1\big\}\,.$$

Sea ω una 1-forma en $\mathbb{R}^3$.

a) Construye una parametrización regular Φ cuya imagen sea "casi todo" C.

b) Construye una parametrización Φ_0 de D_0 y otra Φ_1 de D_1 de tal manera que

$$\int_\Phi d\omega = \int_{\Phi_0} d\omega + \int_{\Phi_1} d\omega.$$

c) Aplica lo anterior al cálculo de $\displaystyle\int_\Phi d\omega$, donde $\omega = xy(z-1)\,dx + xz\,dy + \cos(xy)\,dz$.

Problema 8. Sea $\mathbf{F} = (f,g,h)$ un campo de vectores con divergencia nula en un abierto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea $\omega = f\,dx\wedge dy - g\,dx\wedge dz + h\,dy\wedge dz$ la correspondiente 2-forma cerrada en U.
Describe el método de cálculo, tal como se explica en los apuntes, de una 1-forma η en U tal que $d\eta = \omega$. Explica por qué el campo de vectores $\mathbf{G}$ tal que $\eta = \mathbf{G}^\flat$ satisface $\mathbf{rot}\,\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Comprueba que este potencial vector particular tiene nula una entrada ¿cuál?

Problema 9. a) Para un campo de vectores cualquiera $\mathbf{F} = (f_1,f_2,f_3)$ comprueba que su rotacional admite la siguiente descripción:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} \;=\; \Big(\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{e}_1)\,,\,\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{e}_2)\,,\,\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{e}_3)\Big)\,.$$

b) Concluye que para todo vector constante $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ se tiene $\mathbf{c}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{c})$.

c) Demuestra que para toda región elemental $D\subset\mathbb{R}^3$ y todo campo $\mathbf{F}$ definido en ella se tiene la siguiente igualdad entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\int_D \mathbf{rot}\,\mathbf{F}\,dxdydz \;=\; \int_{\partial D} d\mathbf{S}\times\mathbf{F}\,.$$

Indicación: demuestra que ambos vectores dan el mismo producto escalar con cada $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$.

Problema 10. a) Demuestra que para toda fución escalar φ y todo vector constante $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ de tiene $\mathbf{rot}\,(\varphi\,\mathbf{c}) = \nabla\varphi\times\mathbf{c}$.

b) Sea $S\subset\mathbb{R}^3$ una superficie compacta con borde y orientada, contenida en un abierto en el que hay definida una función ecalar φ de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestra que se tiene la siguiente igualdad entre vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\int_{\partial S} \varphi\,d\mathbf{s} \;=\; \int_S d\mathbf{S}\times\nabla\varphi\,.$$