

HOJA DE EJERCICIOS 9
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Recordemos las siguientes **definiciones** para una variedad M en \mathbb{R}^n de dimensión k :

1. Una **parametrización** de M viene dada por un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y una aplicación $\Phi(u_1, \dots, u_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por lo menos de clase C^1 y tal que $\Phi(U) \subseteq M$ (no se exige la igualdad de conjuntos). Las variables (u_1, \dots, u_k) de Φ se llaman **coordenadas curvilíneas**.
 2. Sea E espacio vectorial. Si $f : M \rightarrow E$ está dada como restricción $f \equiv F|_M$ de una $F(x_1, \dots, x_n)$ definida en un abierto de \mathbb{R}^n , y si $p \in M$, la **diferencial** $df(p)$ es la restricción $(dF)_p|_{T_p M}$ (lineal de $T_p M$ a E).
 3. Si una función escalar $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una restricción $f \equiv F|_M$ y $p \in M$, decimos que p es **crítico para f** si $df(p) = 0$, es decir si $(dF)_p$ anula a todo vector de $T_p M$, equivalente a que ∇F_p sea ortogonal a $T_p M$.
-

Problema 1. Demuestra que toda variedad afín en \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable en \mathbb{R}^n . Calcula su espacio tangente en cualquier punto.

Problema 2. Considera las variedades de dimensión 1, C_1 y C_2 en \mathbb{R}^3 determinadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Construye parametrizaciones locales de C_1 y de C_2 .

Indicación: Utiliza coordenadas esféricas en C_1 y cilíndricas en C_2 .

Problema 3. Dada la variedad $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z + \sin(x + y + z) = 0\}$, construye una parametrización local de M alrededor del punto $(1, 0, -1)$ usando una función implícita suave.

Problema 4. Demuestra que el subconjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^4$ definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \\ x^2 - 3z^2 + t^2 = 2 \\ 4x^2 - y^2 - z^2 - 2t^2 = -6 \end{cases}$$

es una variedad diferenciable en \mathbb{R}^4 de dimensión 1. Halla los puntos de Γ en los que $(2, -16, 4, 5)$ es vector tangente.

Problema 5. Sea M el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^4 :

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 x_4 \neq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 1\}.$$

- a) Demuestra que M es una variedad diferenciable en \mathbb{R}^4 de dimensión 2.
 - b) Halla una base del espacio tangente de M en $a = (1, 0, 0, -1)$.
 - c) Halla una base del espacio normal de M en a .
-

Problema 6. Consideramos la función $f(x, y) \equiv (8 - x^2 - y^2)(x - 1)$.

Halla los puntos donde $f|_{\overline{B}((0,0),\sqrt{7})}$ alcanza su máximo y su mínimo.

Halla los puntos donde $f|_{\overline{B}((0,0),4)}$ alcanza su máximo y su mínimo.

Indicación: utiliza la identidad $\nabla f \equiv (1 - x) \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} + (8 - x^2 - y^2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y distingue los casos $y = 0$ e $y \neq 0$.

Problema 7. Encuentra los extremos absolutos y relativos de $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3$ en el elipsoide sólido $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 \leq 6\}$.

Indicación: convierte el problema de multiplicadores de Lagrange en uno de autovectores.

Problema 8. Halla los valores extremos de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, de dos maneras distintas:

a) Usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

b) Aprovechando que la siguiente parametrización es sobreyectiva: $\varphi(u, v) = (\cos u \sen v, \sen u \sen v, \cos v)$.

Problema 9. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(1 + x)(1 - x)\}$

a) Demuestra que M es compacto.

b) Elige un punto $a \in M$ tal que el conjunto $S = M \setminus \{a\}$ sea una variedad diferenciable en \mathbb{R}^2 .

c) Dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, halla los extremos absolutos de f de dos maneras distintas:

1) Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, halla primero los extremos relativos de $f|_S$.

2) Usando que $f(x, y) = x^2 + x^2(1 + x)(1 - x)$ y que todo $(x, y) \in M$ cumple $x \in [-1, 1]$.

Problema 10. Consideramos el paraboloido $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0\}$.

(a) Demuestra que la función $f(x, y, z) \equiv x - 2y + z$ no tiene máximo en P pero sí mínimo.

(b) Calcula primero ese mínimo por el método de los multiplicadores de Lagrange.

(c) Después vuélvelo a calcular utilizando la parametrización del paraboloido $\Phi(u, v) \equiv (u, v, u^2 + v^2)$, que es sobreyectiva.

Problema 11. Prueba que $C = \sqrt[4]{2}$ es la constante más pequeña tal que $\|v\|_2 \leq C \|v\|_4$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Indicación: determina el mínimo de la función $f(x, y) = x^4 + y^4$ en la circunferencia unidad.

Problema 12. Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ la elipse de ecuación $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$. Halla los puntos de M a distancia máxima del origen. Igual para la mínima.

Problema 13. Calcula la norma de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

considerada como aplicación lineal de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_4)$ a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. *Indicación:* Plantéalo como un problema de extremos en una variedad y observa que para calcular el máximo de $\|Ax\|_2$ se puede suponer que las componentes de x son ≥ 0 .

Sean un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $M \subset M$ una variedad en \mathbb{R}^n definida por un sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ f_m(x) = b_m \end{array} \right\}$$

con $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ funciones cuyos gradientes $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ son linealmente independientes en cada punto de M . Dada $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, la restricción $f = F|_M$ y un punto $p \in M$ crítico para f , recordemos que la **hessiana intrínseca de f en p** es la restricción a $T_p M$ de la forma cuadrática $v \mapsto v^t A v$, siendo A la siguiente matriz

$$A = \text{Hess}(F)_p - \lambda_1 \text{Hess}(f_1)_p - \dots - \lambda_m \text{Hess}(f_m)_p,$$

y $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ los multiplicadores de Lagrange correspondientes a p .

Problema 14. a) Dado el elipsoide hueco $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 = 6\}$, encuentra los puntos críticos de la función $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_2 x_3$.

Indicación: llega a un problema de autovectores, parecido a lo hecho en el problema 7.

b) Clasifica esos puntos críticos en máximos locales, mínimos locales o sillars.

Problema 15. Consideramos las funciones:

$$F(x, y, z) = z(e^{2x} - \cos x) - 2y, \quad g(y, z) = (y+2)z - e^{2z+y-2}.$$

a) Comprueba que los conjuntos:

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y, z) : x - y + g(y, z) = 1\}, \\ Y &= \{(x, y, z) : y - x + g(y, z) = 1\}, \\ Z &= \left\{ (x, y, z) : \frac{y-x}{3} + g(y, z) = 1 \right\}, \end{aligned}$$

son variedades en \mathbb{R}^3 y que las tres contienen al punto $p = (0, 0, 1)$.

b) Comprueba que p es punto crítico de $F|_X$ de $F|_Y$ y de $F|_Z$.

c) Averigua qué tipo de punto crítico es p en cada uno de los tres casos del apartado b).

Problema 16. a) Demuestra que las siguientes ecuaciones definen una variedad M en \mathbb{R}^4 y di, razonadamente, cuál es la dimensión de M

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3^2 + e^{x_1+x_2-x_4} = 0, \\ 1 + x_2 - x_3^2 + x_4^5 = 0. \end{cases}$$

b) Halla una base de $T_a M$, siendo $a = (0, 0, 1, 0) \in M$.

c) Dada $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + \alpha x_2 + \beta x_3 + x_4^2)|_M$, calcula la expresión de la diferencial intrínseca $(df)_a$ con respecto a la base calculada en el apartado b).

d) Halla los valores de α, β para los que a es un punto crítico de f .

e) Muestra que para $\alpha = -1$ y $\beta = 2$ el punto a es un mínimo local de f .

Problema 17. Prueba que $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z + e^{x+y+z} = 1\}$ es una superficie y $a = (1, 0, -1) \in M$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^2 tal que

$$\nabla f(a) = (\alpha, 0, 1) \quad \text{y} \quad \text{Hess}(f)_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

a) Halla un valor $\alpha \in \mathbb{R}$ para que a sea un punto crítico de $f|_M$.

b) Para el valor de α hallado en el apartado anterior, encuentra dos intervalos abiertos I_1 e I_2 tales que:

- para todo $\beta \in I_1$ el punto a sea un mínimo local de $f|_M$,
- para todo $\beta \in I_2$ el punto a no sea ni mínimo local ni máximo local de $f|_M$.