6 Formas diferenciales exteriores

En este capítulo k y n serán enteros positivos con $k \leq n$.

6.1 Integrandos para funciones paramétricas

En este apartado queremos hacer lo mismo que en el capítulo anterior, pero reemplazando los caminos (funciones de t) por funciones de varias variables.

Definición 137. *Una* ***función paramétrica*** *de k parámetros en $\mathbb{R}^n$ está dada por una región acotada $D \subset \mathbb{R}^k_u$ y la restricción $\Phi|_D : D \to \mathbb{R}^n_x$ a la región D de una función $\Phi(u) : W \to \mathbb{R}^n_x$, donde $W \subseteq \mathbb{R}^k_u$ es un abierto conteniendo a D y Φ es al menos de clase $\mathcal{C}^1$ en W. En este contexto las variables $u_1, \ldots, u_k$ se llamarán* ***parámetros.***
Si $k = 1$ la región D será un intervalo y Φ es un ***camino.*** *Si $k = 2$ entonces $\Phi(u_1, u_2)$ también puede llamarse* ***superficie paramétrica*** *en $\mathbb{R}^n$.*

Si una función paramétrica $\Phi(u) : D \to \mathbb{R}^n$ está dada por n funciones $\Phi(u) \equiv \big(x_1(u) \ldots, x_n(u)\big)$ de los k parámetros $u_1, \ldots, u_k$, entonces una integral (de primer orden) sobre Φ será el número:

$$\int\limits_{u \in D} (\cdots)\, du_1 \cdots du_k \ ,$$

donde $(\cdots)$ es una función de $(u_1, \ldots, u_k)$ que se construye combinando (solamente) las funciones $x_i(u)$ y sus derivadas primeras $\partial x_i / \partial u_j$, o sea combinando el vector $\Phi(u)$ y la matriz $D\Phi_u$.

Definición 138. *Un* ***integrando para funciones de k parámetros en*** *$\mathbb{R}^n$ es una función escalar $L(x, A)$, donde x representa puntos de $\mathbb{R}^n$, A representa matrices $n \times k$ con entradas reales y el par (x, A) recorre un abierto del espacio $\mathbb{R}^n \times M_{n\times k}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+nk}$.*
Dada $\Phi(u) : D \to \mathbb{R}^n$, función paramétrica de k parámetros, la ***integral de L sobre Φ*** *es el número que resulta de evaluar L en los pares "punto-matriz jacobiana" $\big(\Phi(u)\, , D\Phi_u\big)$ de Φ e integrar sobre D la función resultante $D \ni u \mapsto L\big(\Phi(u)\, , D\Phi_u\big)$:*

$$\int_\Phi L \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{u \in D} L\big(\Phi(u)\, , D\Phi_u\big)\, du_1 \cdots du_k \ .$$

En principio L puede ser cualquier función de $n + nk$ variables definida en un abierto de $\mathbb{R}^{n+nk}$.

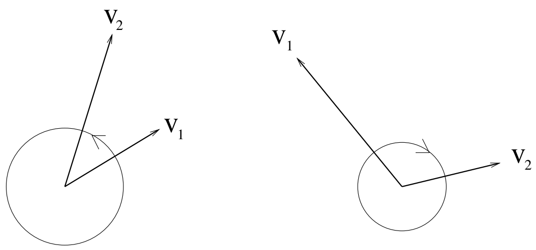
6.2 Orientación de variedades

Aquí queremos definir el análogo, para funciones de varios parámetros, del *sentido de avance* que fue importante en la definición 128 del apartado 5.2. Empecemos definiendo el concepto de orientación para un espacio vectorial.
En Física y en Química se utiliza la palabra **quiral,** procedente del griego $\chi\varepsilon i\rho$ (jeir), que significa *mano,* para referirse a aquellos objetos que no pueden superponerse a su imagen especular. El ejemplo más obvio son los guantes: al reflejar un guante de la mano derecha en un espejo resulta un guante de la mano izquierda, y moviendo el guante derecho en el aire nunca podremos convertirlo en el izquierdo. En otras palabras, los objetos quirales se dividen en "derechos" e "izquierdos".
Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real de dimensión finita $k > 0$. Resulta que las bases *ordenadas* de $\mathbb{V}$ son objetos quirales: se dividen en dos clases de equivalencia disjuntas.

Definición 139. *Dos bases ordenadas $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{V}$ son* **equivalentes** *si la matriz de paso de una a otra tiene determinante positivo.*
Una **orientación** *de $\mathbb{V}$ es una clase de equivalencia de bases suyas ordenadas.*

Es importante que las bases sean ordenadas, es decir que se sabe cuál es el primer vector, cuál el segundo vector, etc, porque al permutar una base se permutan columnas (o filas) de la matriz de paso y eso puede cambiar el signo de su determinante.
Elegidos $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{V}$, linealmente independientes, cualquier base ordenada de $\mathbb{V}$ es equivalente o bien a $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ o bien a $\{-\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, no a ambas. Luego $\mathbb{V}$ tiene exactamente dos orientaciones.
Si $\mathbb{V}$ tiene dimensión 1 es una recta real. Una clase de equivalencia de bases consta de una vector no nulo $\mathbf{u}_1$ y todos sus múltiplos positivos, es decir que una orientación es en este caso un sentido de avance a lo largo de la recta.
En el espacio numérico $\mathbb{R}^k$ tenemos la base estándar $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$. Dada cualquier base ordenada $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, la matriz de paso de la estándar a $\mathcal{B}$ es la matriz $P = \left[\, \mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k \,\right]$ cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$. Una orientación de $\mathbb{R}^k$ es la clase de las bases ordenadas con $\det \left[\, \mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_k \,\right]$ positivo y la otra orientación es la clase de las bases ordenadas con ese determinante negativo. En los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ reconocemos *visualmente* el signo de ese determinante asociando la base ordenada con un objeto quiral que nos resulte familiar.

A dos vectores ordenados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, linealmente independientes, el objeto quiral que se les suele asociar es un *círculo giratorio* que señale el camino angular más corto de $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$. Hecho esto, se tiene $\det[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] > 0$ si el círculo gira en sentido antihorario y se tiene $\det[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] < 0$ si el círculo gira en sentido horario,



por ejemplo $\det[\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2] > 0$ y $\det[\mathbf{e}_2|\mathbf{e}_1] < 0$.
En un plano cualquiera (espacio vectorial de dimensión 2) dos bases ordenadas son equivalentes si y sólo si definen el mismo sentido de giro por el camino angular más corto del primer vector al segundo. Esto está bien definido porque, de los dos caminos angulares del primer vector al segundo, el corto es menor que un semiplano y el largo mayor que un semiplano; luego no necesitamos que haya un producto escalar establecido en dicho plano para poder reconocer el camino angular corto y asociar un sentido de giro al par ordenado de vectores.
Orientar un plano es decidir qué sentido de giro consideramos antihorario en él.

A tres vectores ordenados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, linealmente independientes, algunas personas les asocian una **mano derecha** y otras presonas les asocian un **tornillo derecho**[2]. El plano generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ separa $\mathbb{R}^3$ en dos **semiespacios;** colocamos nuestra mano derecha de modo que al cerrarla los dedos señalen el sentido de giro de $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ por el camino angular más corto; entonces $\det[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3]$ es positivo si y sólo si el pulgar apunta hacia el mismo semiespacio al que apunta $\mathbf{v}_3$.
Orientar un espacio vectorial de dimensión 3 es decidir qué manos consideramos derechas en él.

Sea $\operatorname{or}(\mathbb{V})$ el conjunto (tiene dos elementos) de las orientaciones de $\mathbb{V}$. Un isomorfismo lineal $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transforma bases ordenadas de $\mathbb{V}$ en bases ordenadas de $\mathbb{W}$ mediante la regla $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \longmapsto \{L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_k)\}$, de modo que la matriz de paso entre dos bases es igual a la matriz de paso entre las transformadas, y por lo tanto L induce una biyección $\operatorname{or}(\mathbb{V}) \to \operatorname{or}(\mathbb{W})$.

Apliquemos esto a parametrizaciones. Tenemos una variedad X de dimensión k, un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una parametrización *regular* $\Phi : W \to X$. Para cada valor paramétrico $u \in W$ y el correspondiente punto $p = \Phi(u)$, tenemos un isomorfismo lineal $(d\Phi)_u : \mathbb{R}^k \to T_pX$ que

[2] Uno que se mete para adentro cuando giramos su cabeza en sentido horario. Casi todos los tornillos que nos encontramos en la vida diaria son así.

transporta la orientación estándar de $\mathbb{R}^k$ (la de la base estándar) a una orientación de T_pX (la de la base ordenada $\{\Phi_{u_1}(u), \ldots, \Phi_{u_k}(u)\}$).

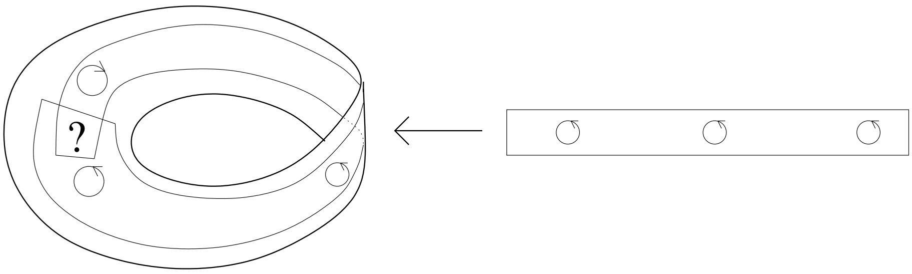
Definiciones 140. *Sea X una variedad en $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. Una* **orientación** *para X es un objeto $\mathcal{O}$ que elige una orientación $\mathcal{O}_p$ en cada espacio tangente T_pX y lo hace de manera continua, es decir que siempre que $p, q \in X$ estén "muy juntos" las orientaciones elegidas en T_pX y en T_qX puedan definirse por bases muy parecidas.*
Decimos que X es **orientable** *si admite una orientación. Una* **variedad orientada** *es un par $(X, \mathcal{O})$ formado por una variedad orientable X y una orientación $\mathcal{O}$ de X.*
Dada una variedad orientada $(X, \mathcal{O})$ de dimensión k y dado un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$, decimos que una parametrización regular $\Phi : W \to X$ es **compatible con** *$\mathcal{O}$ si para cada $u \in W$ la diferencial $(d\Phi)_u$ lleva la orientación estándar de $\mathbb{R}^k$ a $\mathcal{O}_{\Phi(u)}$.*

Se introduce el adjetivo "orientable" porque no toda variedad admite orientaciones. Más abajo damos un ejemplo de esto.
La siguiente proposición muestra interacciones entre orientación y conexión por caminos.

Proposición 141. *Sea X una variedad orientable y conexa por caminos. Si dos orientaciones de X coinciden en un espacio tangente $T_{p_0}X$, entonces son la misma.*
Sean una variedad orientada $(X, \mathcal{O})$ de dimensión k, un abierto conexo por caminos $W \subseteq \mathbb{R}^k$ y una parametrización regular $\Phi : W \to X$ (no necesariamente inyectiva). Si para un valor particular $u_0 \in W$ se cumple que $(d\Phi)_{u_0}$ lleva la orientación estándar de $\mathbb{R}^k$ a $\mathcal{O}_{\Phi(u_0)}$, entonces Φ es compatible con $\mathcal{O}$.

Véase el apartado 6.11 para la demostración. De la proposición 141 se deduce fácilmente que una variedad orientable y conexa por caminos tiene exactamente dos orientaciones. Una variedad X, con s componentes conexas por caminos $X_1, \ldots, X_s$, es orientable si y sólo si cada una de las X_j es orientable, y entonces tiene $2 \times \cdots \times 2$ (s factores) orientaciones, dando lugar a 2^s *variedades orientadas* distintas.

La siguiente figura muestra una parametrización regular Φ, no inyectiva, de un abierto rectangular de $\mathbb{R}^2$ a la banda de Möbius.



Supongamos que la banda de Möbius fuese orientable. Como es conexa por caminos, tendría exactamente dos orientaciones $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$. Como el rectángulo es conexo por caminos, la parametrización Φ tendría que ser compatible con $\mathcal{O}_1$ o con $\mathcal{O}_2$. En cualquier de los dos casos Φ tendría que llevar la orientación estándar de $\mathbb{R}^2$ (indicada en la figura por círculos giratorios) a una sola orientación de la parte indicada por "?" en la figura; pero se ve fácilmente que Φ induce en dicha parte dos orientaciones distintas: una procedente de la parte izquierda del rectángulo y la otra procedente de la parte derecha del rectángulo. Por reducción al absurdo, concluimos que la banda de Möbius es una superficie no orientable.

El concepto de parametrización compatible sugiere un método para construir orientaciones: se toma una parametrización regular $\Phi : W \to X$ y entonces cada base $\{\Phi_{u_1}(u), \ldots, \Phi_{u_k}(u)\}$ orienta al espacio tangente $T_{\Phi(u)}X$. Si todo va bien habremos construido una orientación en la imagen $\Phi(W) \subseteq X$. Se plantean dos cuestiones: ¿cómo es la imagen $\Phi(W)$? ¿quedan los espacios $T_{\Phi(u)}X$ orientados de manera continua al hacer eso?
El siguiente lema generaliza a variedades la proposición 89 del apartado 3.6.

Lema 142. *Dada una variedad X de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ y clase $\mathcal{C}^s$, las parametrizaciones regulares $\mathbb{R}^k \supseteq W \xrightarrow{\Phi} X$ son* **localmente inyectivas** *y* **abiertas a** *X, es decir que para todo abierto $W' \subseteq W$ el conjunto $\Phi(W')$ es un abierto relativo de X.*

Véase el apartado 6.11 para la demostración. El lema nos dice que la imagen $Y = \Phi(W)$ es un abierto relativo de X, luego es también una variedad de dimensión k y clase $\mathcal{C}^s$. Con la ayuda del lema demostramos la siguiente proposición, que ya nos proporciona una infinidad de variedades orientadas.

Proposición 143. *Sea $\Phi : W \to X$ parametrización regular, con W abierto de $\mathbb{R}^k$ y $k = \dim X$. Si Φ es inyectiva entonces es compatible con una única orientación de $Y = \Phi(W)$, que de este modo resulta ser una variedad orientable.*

Demostración. Cada punto $p \in Y$ tiene una única preimagen $u \in W$ y se determina una única orientación en $T_pY = T_pX$ resultado de transportar por $(d\Phi)_u$ la orientación estándar de $\mathbb{R}^k$. Al ser $\Phi : W \to Y$ abierta, la inversa $\Phi^{-1} : Y \to W$ es continua. Entonces la base ordenada $\{\Phi_{u_1}(u), \ldots, \Phi_{u_k}(u)\}$ es función continua del punto p, porque $u = \Phi^{-1}(p)$ también lo es, y hemos construido una orientación para Y que es la única con la que Φ es compatible. $\square$

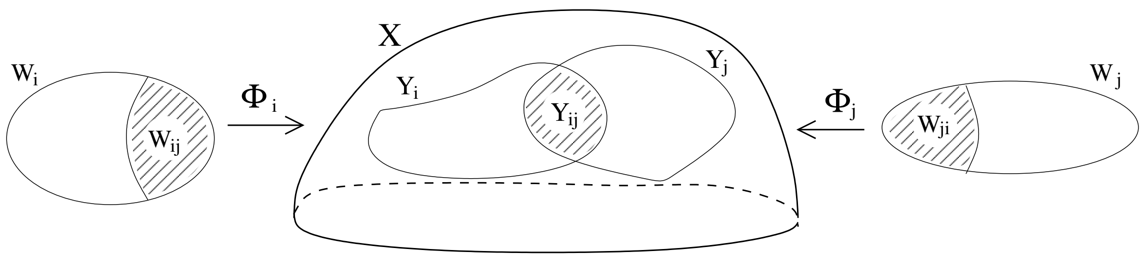
Existen muchas variedades que no se pueden obtener como imagen de una parametrización regular e inyectiva. Por ejemplo, si existiera una parametrización $\Phi : W \to S^2$ regular y *biyectiva* de un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^2$ a la esfera S^2 entonces Φ sería abierta a S^2 por el lema 142 y la inversa $\Phi^{-1} : S^2 \to W$ sería continua y biyectiva, obligando al abierto $W \subseteq \mathbb{R}^2$ a ser compacto, imposible.
La idea para construir una orientación (si existe) en una variedad de esas es la siguiente:

> Se toman varias parametrizaciones $\Phi_i : W_i \to X$ regulares e inyectivas, de modo que las imágenes $\Phi_i(W_i)$ recubran toda la variedad X, y se procura que en las intersecciones no vacías $Y_{ij} = \Phi_i(W_i) \cap \Phi_j(W_j)$ coincidan la orientación inducida por Φ_i con la inducida por Φ_j.

Como Y_{ij} es un abierto relativo de X, tenemos dos abiertos de $\mathbb{R}^k$ definidos como sigue:

$$W_{ij} = \Phi_i^{-1}(Y_{ij}) \quad , \quad W_{ji} = \Phi_j^{-1}(Y_{ij}) \, ,$$

y las restricciones $W_{ij} \xrightarrow{\Phi_i} Y_{ij} \xleftarrow{\Phi_j} W_{ji}$ son ambas biyectivas.



Proposición 144. *Si la variedad X y las Φ_i son de clase $\mathcal{C}^s$, entonces las biyecciones*

$$\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : W_{ij} \longrightarrow W_{ji} \quad , \quad \Phi_i^{-1} \circ \Phi_j : W_{ji} \longrightarrow W_{ij} \, , \tag{60}$$

son difeomorfismos de clase $\mathcal{C}^s$ entre abiertos de $\mathbb{R}^k$.

Véase el apartado 6.11 para la demostración.

Definición 145. *Sean $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ dos abiertos y $\sigma : W_1 \to W_2$ un difeomorfismo. Decimos que σ* **conserva la orientación** *si $\det(D\sigma)$ es siempre positivo. Decimos que σ* **invierte la orientación** *si $\det(D\sigma)$ es siempre negativo.*

El difeomorfismo $\sigma = \Phi_i^{-1} \circ \Phi_j : W_{ji} \to W_{ij}$ es tal que $\Phi_j|_{W_{ji}} = \big(\Phi_i|_{W_{ij}}\big) \circ \sigma$. Entonces $\Phi_i|_{W_{ij}}$ y $\Phi_j|_{W_{ji}}$ inducen la misma orientación en Y_{ij} si y sólo si $\det D\sigma$ es positivo, es decir si y sólo si σ conserva la orientación.

Teorema 146. *Sea X una variedad que se recubre con imágenes $\Phi_i(W_i)$ de parametrizaciones regulares e inyectivas tales que siempre que sea $\Phi_i(W_i) \cap \Phi_j(W_j) \neq \varnothing$ el difeomorfismo $\Phi_i^{-1} \circ \Phi_j$ conserva la orientación allí donde está definido. Entonces hay una única orientación en X con la que son compatibles todas las Φ_i.*
Recíprocamente, dada X orientable y cualquier orientación suya $\mathcal{O}$, hay un recubrimiento de X por imágenes $\Phi(W_i)$ de parametrizaciones regulares, inyectivas y compatibles con $\mathcal{O}$.

Demostración.
La condición $\det D(\Phi_i^{-1} \circ \Phi_j) > 0$ hace que Φ_i y Φ_j definan la misma orientación en el abierto relativo $\Phi_i(W_i) \cap \Phi_j(W_j)$ de X. Entonces se define una orientación en toda X de la manera siguiente: dado $p \in X$, eligiendo cualquier pareja (Φ_i, u) con $u \in W_i$ y $p = \Phi_i(u)$ ponemos en T_pX la orientación inducida por $(d\Phi_i)_u$. El resultado no depende de la elección de la pareja, además es una elección continua de orientación de los espacios tangentes porque es una elección continua en cada abierto relativo $\Phi_i(W_i)$.
Sea ahora X con una orientación $\mathcal{O}$. En primer lugar, siempre se puede recubrir X por imágenes $\Phi_i(W_i)$ de parametrizaciones regulares e inyectivas; esto es cierto aunque X no sea orientable y puede hacerse, por ejemplo, con parametrizaciones grafo. En segundo lugar, podemos suponer que los abiertos W_i son conexos por caminos porque, en caso contrario, restringimos Φ_i a cada componente conexa por caminos de W_i y obtenemos (varias) parametrizaciones regulares e inyectivas que recubren el mismo conjunto que la Φ_i original. Una vez que cada W_i es conexo por caminos, la imagen $\Phi(W_i)$ está contenida en una componente conexa por caminos de X, la cual sólo admite dos orientaciones: la $\mathcal{O}$ y otra, y la proposición 141 dice que Φ_i tiene que ser compatible con una de ellas. Si Φ es compatible con $\mathcal{O}$, la dejamos como está. Si Φ_i es compatible con la otra orientación, tomamos cualquier difeomorfismo $\sigma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ que invierta la orientación, reemplazamos W_i con $W_i' = \sigma^{-1}(W_i)$ y reemplazamos Φ con $\Phi \circ \sigma : W_i' \to X$, que es compatible con $\mathcal{O}$ y cubre la misma parte de X que cubría Φ_i. □

Como difeomorfismo que invierta la orientación en $\mathbb{R}^k$ podemos tomar uno de éstos:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_k) \longmapsto (-u_1, u_2, \ldots, u_k) \quad , \quad (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k) \longmapsto (u_2, u_1, u_3, \ldots, u_k)\,,$$

o cualquier otro que nos guste.

6.3 Hipersuperficies: orientación y normal unitaria

En el caso particular de una **hipersuperficie,** es decir una variedad X de dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos una sencilla caracterización tanto de la orientabilidad como de las orientaciones. Empezamos estudiando las orientaciones de un **hiperplano,** es decir de un subespacio vectorial $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ de dimensión $n-1$. Dadas dos bases $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ de $\mathbb{V}$ y un vector $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ normal a $\mathbb{V}$, tenemos las bases $\{\mathbf{a}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ y $\{\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz de paso es

$$P' = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & P \end{array}\right],$$

siendo P la matriz de paso entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Si exigimos:

$$\det\big[\,\mathbf{a}\,|\,\mathbf{u}_1\,|\,\cdots\,|\,\mathbf{u}_{n-1}\big] > 0\,, \tag{61}$$

y lo mismo para $\{\mathbf{a}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$, entonces $0 < \det P' = \det P$ y por lo tanto $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ definen la misma orientación en $\mathbb{V}$. Esto significa que la condición (61) establece una biyección entre las direcciones normales a $\mathbb{V}$ en $\mathbb{R}^n$ (las dos posibles elecciones de $\mathbf{a}$ salvo factor escalar positivo) y las dos orientaciones de $\mathbb{V}$.

Dada una hipersuperficie X en $\mathbb{R}^n$, aplicamos esas observaciones a cada espacio tangente T_pX y deducimos que es equivalente elegir una orientación de T_pX a elegir una normal no nula $\mathbf{a}(p) \in \{T_pX\}^\perp$. La correspondencia entre una y otra elección es la siguiente:

> La normal no nula $\mathbf{a}(p)$ corresponde a la orientación definida en T_pX por una base ordenada $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ si y sólo si
>
> $$\det \left[\, \mathbf{a}(p) \,|\, \mathbf{u}_1 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{u}_{n-1} \,\right] > 0 \, . \tag{62}$$

Esta correspondencia funciona en las dos direcciones: un campo normal $\mathbf{a} : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ determina mediante (62) una única orientación en cada espacio T_pX; asimismo una orientación de X determina mediante (62) un campo normal $\mathbf{a} : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ que es único salvo multiplicar por una función escalar positiva, habiendo entre todos ellos un único campo unitario.

Teorema 147. *Sea X una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$.*
Si un campo normal $\mathbf{a} : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ es continuo entonces le corresponden por (62) orientaciones de los espacios T_pX que varían de manera continua con p, es decir que forman una orientación de X.
Dada una orientación de X, entre los campos normales que le corresponden por (62) los hay continuos, por ejemplo el unitario.

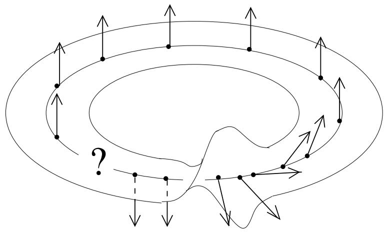
Véase el apartado 6.11 para la demostración.

Corolario 148. *Una hipersuperficie X en $\mathbb{R}^n$ es orientable si y sólo si admite un campo normal continuo. Además (62) establecce una biyección entre las orientaciones de X y los campos normales $\mathbf{a} : X \to \mathbb{R}^n$ continuos y unitarios.*

Si X viene dada por una ecuación $f_1(x) = b_1$, con gradiente ∇f_1 nunca nulo en X, entonces podemos elegir $(\nabla f_1)|_X$ como normal continua y queda elegida una orientación en X.
En lugar del campo ∇f_1, nos sirve cualquier otro de la forma $g \cdot (\nabla f_1)|_X$ con $g : X \to \mathbb{R}$ continua y positiva. En particular el campo $(1/\|\nabla f_1\|_2) \cdot \nabla f_1$ es la **normal unitaria** a la hipersuperficie que apunta en el sentido de aumento de f_1.

Para la esfera S^{n-1} podemos tomar la normal unitaria $(1/2) \cdot \nabla(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = (x_1, \ldots, x_n)$. Esto y (62) definen una orientación para la esfera, que por lo tanto es orientable.

Recíprocamente, si una hipersuperficie X no es orientable entonces no admite una normal continua y no nula. Es lo que le ocurre a la **banda de Möbius.**



Observación. Nos preguntamos si la banda de Möbius, llamémosla S, es de las superficies que se obtienen en $\mathbb{R}^3$ por el teorema 104 del apartado 4.3. Es, decir, nos preguntamos si existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, una función $f_1 \in \mathcal{C}^1(U)$ y un $b_1 \in \mathbb{R}$ tales que $S = \{x \in U \,:\, f_1(x) = b_1\}$ y el gradiente ∇f_1 no se anula en nigún punto de S. En primer lugar, no sirve para U cualquier abierto de $\mathbb{R}^3$: tiene que ser un abierto en el cual S sea un **cerrado relativo,** porque esperamos que sea $S = f_1^{-1}(\{b_1\})$. Existen numerosos abiertos de $\mathbb{R}^3$ en los que S es un cerrado relativo, pero en ninguno de ellos se puede encontrar una pareja f_1, b_1 que cumpla lo pedido porque si existiera tal pareja entonces $\mathbf{a} \equiv \left(\nabla f_1 / \|\nabla f_1\|_2 \right)\big|_S$ sería una normal unitaria y continua para la banda de Möbius, que no puede existir. Conclusión:

$$\boxed{\text{No toda variedad en } \mathbb{R}^n \text{ se obtiene por el teorema 104 del apartado 4.3.}}$$

6.4 Orientación e integración, caso de dos parámetros

Definiciones 149. (1) *Tenemos abiertos* $W, \widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}^k$, *regiones acotadas* $D \subseteq W$, $\widetilde{D} \subseteq \widetilde{W}$ *y un difeomorfismo* $\sigma : \widetilde{W} \to W$. *Supongamos que* σ *es biyectivo de* $\widetilde{D}$ *a* D. *Para toda función paramétrica* $\Phi(u) : D \to \mathbb{R}^n$, *la* **reparametrizada por** σ *es la función compuesta:*

$$\Phi \circ \sigma(\tilde{u}) : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ ,$$

es decir el resultado de hacer el cambio de parámetros $u = \sigma(\tilde{u})$ *en* $\Phi(u)$.
(2) *Un integrando* L *para funciones de* k *parámetros en* $\mathbb{R}^n$ *es* ***paramétrico*** *si cumple:*

$$\sigma \ \text{conserva la orientación} \quad \Longrightarrow \int_{\Phi\circ\sigma} L \ = \ \int_{\Phi} L \ .$$

Insistimos en que el concepto de reparametrización se define para funciones paramétricas en general, sean regulares o no, inyectivas o no, esté su imagen contenida en una variedad o no.

En el resto de este apartado nos restringimos al caso $k = 2$.
Tenemos un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^2_{uv}$ del plano de parámetros (u, v) y una región acotada $D \subseteq W$. Tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y consideramos funciones $\Phi(u, v) : D \to U$ que sean restricción a D de funciones $W \to U$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$; esto hace que las funciones $\Phi_u, \Phi_v : D \to \mathbb{R}^n$ estén definidas (restricciones a D de las derivadas en W) y sean al menos continuas.
Escribiremos la jacobiana $D\Phi$ de dos maneras, que consideraremos equivalentes: como una matriz "alta" $\big[\, \Phi_u \mid \Phi_v \,\big] \in \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{R})$ y como un par de columnas $\big(\, \Phi_u \, , \, \Phi_v \,\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En concordancia con esto, los integrandos para estas Φ los veremos indistintamente como funciones $L(x, A)$ del par punto-matriz $(x, A) = \big(\, x \, , \, [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2] \,\big) \in U \times \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{R})$ y también como funciones $L(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de la terna punto-vector-vector $(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
La integral de uno de esos integrandos L sobre una función de dos parámetros $\Phi : D \to U$ es, pues, el siguiente número:

$$\int_\Phi L \ = \ \int_D L\big(\, \Phi(u,v) \, , \, D\Phi_{(u,v)} \,\big) \, dudv \ = \ \int_D L\big(\, \Phi(u,v) \, ; \, \Phi_u \, , \, \Phi_v \,\big) \, dudv \ .$$

Para cada dos índices $1 \leq i < j \leq n$ consideramos la proyección

$$\pi_{ij} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \ \longmapsto \ (x_i, x_j) \ ,$$

y la función escalar Δ_{ij}, actuando indistintamente sobre matrices altas $A = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2]_{n\times 2}$ o sobre pares de columnas $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, que consiste en el determinante 2×2 formado por la fila i y la fila j de A. En total hay $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ funciones Δ_{ij} y, si las aplicamos a la jacobiana $D\Phi$, el resultado son los determinantes jacobianos de las proyecciones de Φ:

$$\Delta_{ij}\big(\, \Phi_u \, , \, \Phi_v \,\big) \ = \ \Delta_{ij}\big(D\Phi\big) \ = \ \det D(\pi_{ij} \circ \Phi) \ .$$

Al reparametrizar por un difeomorfismo $\sigma(\widetilde{u}, \widetilde{v}) : \widetilde{W} \to W$ cada proyección $\pi_{ij} \circ \Phi$ se reparametriza por este mismo σ y, aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\Delta_{ij}\big(\, D(\Phi\circ\sigma) \,\big) \, (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \ = \ \det \big(\, D(\pi_{ij} \circ \Phi \circ \sigma) \,\big)_{(\widetilde{u},\widetilde{v})} \ = \ \det \big(D\sigma\big)_{(\widetilde{u},\widetilde{v})} \cdot \det \big(\, D(\pi_{ij} \circ \Phi) \,\big)_{\sigma(\widetilde{u},\widetilde{v})} \ ,$$

es decir:

$$\Delta_{ij}\big(\, D(\Phi\circ\sigma) \,\big) \ = \ \det(D\sigma) \cdot \big[\big(\Delta_{ij}(D\Phi)\big) \circ \sigma \big] \quad \text{para cualesquiera índices } 1 \leq i < j \leq n \ . \tag{63}$$

Consideramos el espacio $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$, cuyos elementos son las familias de núneros $\mathbf{t} = \big(t_{ij}\big)_{1\leq i<j\leq n}$ con los pares $i < j$ como índices. Por ejemplo, el elemento general $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\binom{3}{2}}$ se escribe $\mathbf{t} = (t_{12}, t_{13}, t_{23})$ y el de $\mathbb{R}^{\binom{4}{2}}$ se escribe $\mathbf{t} = (t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34})$. Los índices de las entradas de estos vectores son pares crecientes de números enteros.
Para $A = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2]$, o el par $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, definimos el **vector de menores** $\Delta(A)$ como el elemento de $\mathbb{R}^{\binom{n}{2}}$ cuyas entradas son $t_{ij} = \Delta_{ij}(A)$. Entonces las identidades (63) nos dicen que al reparametrizar Φ el vector de menores de la jacobiana se transforma de la manera siguiente:

$$\Delta\big(\, D(\Phi\circ\sigma) \,\big) \ = \ \det(D\sigma) \cdot \big[\big(\, \Delta(D\Phi) \,\big) \circ \sigma \big] \ . \tag{64}$$

Teorema 150. *Para que un integrando $L(x,A)$ para funciones de dos parámetros en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sea paramétrico es necesario y suficiente que exista una función $L_0(\,x\,,\,\mathbf{t}\,) : U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{2}} \to \mathbb{R}$ cumpliendo dos condiciones, la primera:*

$$L(x,A) \;\equiv\; L_0\,(\,x\,,\,\Delta(A)\,)\;, \tag{65}$$

y la segunda:

$$c \;>\; 0 \;\Longrightarrow\; L_0(x, c\,\mathbf{t}) \;=\; c\,L_0(x,\mathbf{t})\;. \tag{66}$$

es decir que $L_0(p,\mathbf{t})$ *sea positivamente homogénea* **de grado 1** *en el vector* $\mathbf{t}$.

Demostración parcial. Sólo vamos a probar la parte de suficiencia.
Sean $\Phi(u,v) : D \to U$ una función de dos parámetros y $\Phi \circ \sigma : \widetilde{D} \to U$ una reparametrización por un difeomorfismo σ que conserva la orientación, es decir que tiene $\det(D\sigma) > 0$. Si existe L_0 cumpliendo (65) y (66), aplicamos la identidad (64) y la homogeneidad de L_0 para deducir:

$$L\big(\,\Phi\circ\sigma\,,\,D(\Phi\circ\sigma)\,\big) \;=\; \det(D\sigma)\cdot\big[\,L\big(\Phi, D\Phi\big)\circ\sigma\,\big]\;,$$

y, utilizando la fórmula de cambio de variables en integrales dobles:

$$\int_{\Phi\circ\sigma} L \;=\; \int_{\widetilde{D}} |\det(D\sigma)|\cdot\big[\,L\big(\,\Phi\,,\,D\Phi\,\big)\circ\sigma\,\big]\,d\widetilde{u}d\widetilde{v} \;=\; \int_D L\big(\,\Phi\,,\,D\Phi\,\big)\,dudv \;=\; \int_\Phi L\;.$$

□

La función $A \longmapsto \Delta(A)$ *pierde información,* es decir que no se puede recuperar A a partir de su vector de menores. Esto se hace evidente con una *transformación elemental:*

$$(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \;\longmapsto\; (\,\mathbf{v}_1 + \lambda\,\mathbf{v}_2\,,\,\mathbf{v}_2\;)\,, \tag{67}$$

como las usadas en el método de Gauss pero haciendo combinaciones de columnas en vez de filas, que cambia la matriz y al mismo tiempo deja intacto el vector de menores. La jacobiana $D\Phi$ sufre la trasformación (67) al reparametrizar Φ por el difeomorfismo $\sigma(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \big(\,\widetilde{u}\,,\,\widetilde{v} + \lambda\,\widetilde{u}\,\big)$, que además tiene $\det(D\sigma) \equiv 1$. Escribiendo

$$\mathbf{v}_1 \;=\; \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} \quad,\quad \mathbf{v}_2 \;=\; \begin{bmatrix} v_{12} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix}\;,$$

se deduce que no existe una función L_0 que cumpla (65) para integrandos como los siguientes:

$$L(x;\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \;=\; (x_1 + 5x_3) + v_{11}v_{22} \quad,\quad L(x;\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) \;=\; e^{x_2 - x_4}\,(v_{31})^2\;.$$

Un integrando como $L = e^{x_3}\,(\Delta_{12})^2$ tampoco es paramétrico porque, si bien existe $L_0(x,\mathbf{t})$ que cumple (65) y es homogénea en $\mathbf{t}$, lo es con un grado inadecuado.

La identidad (64) es cierta tanto si σ conserva la orientación como si la invierte. Esto nos permite considerar los dos casos especiales siguientes:

> (par) Si L_0 existe cumpliendo (65) y (66), y es **par:** $L_0(x,-\mathbf{t}) = L_0(x,\mathbf{t})$, entonces $\int_\Phi L$ permanece igual al reparametrizar, tanto si σ conserva la orientación como si la invierte. Si X admite una parametrización regular y biyectiva, entonces todas las parametrizaciones biyectivas Φ dan el mismo resultado $\int_\Phi L$, sin mirar orientaciones, resultado que define $\int_X L$.
>
> (impar) Si L_0 existe cumpliendo (65) y (66), y es **impar:** $L_0(x,-\mathbf{t}) = -L_0(x,\mathbf{t})$, entonces $\int_\Phi L$ permanece igual al reparametrizar conservando la orientación, y se multiplica por -1 al reparametrizar invirtiendo la orientación. Si $(X,\mathcal{O})$ es una superficie orientada que admite una parametrización regular y biyectiva, entonces todas las parametrizaciones biyectivas Φ, y compatibles con la orientación $\mathcal{O}$, dan el mismo resultado $\int_\Phi L$ que así define la integral $\int_{(X,\mathcal{O})} L$.

Supongamos que X admite una parametrización regular y biyectiva Φ_0, y sea Φ otra parametrización biyectiva de X, no necesariamente regular. Si repasamos la prueba de la proposición 144 vemos que con estas hipótesis basta para que $\sigma = \Phi_0^{-1} \circ \Phi$ sea de clase $\mathcal{C}^s$, además de biyectiva. Para los cambios de parámetro $\sigma : \widetilde{W} \to W$, biyectivos aunque tal vez no difeomorfismos, se cumplen dos cosas que no vamos a demostrar aquí:

– Si $\widetilde{W}$ es conexo por caminos, entonces $\det(D\sigma)$ puede anularse pero no cambia de signo.

– Todavía es válida la fórmula de cambio de variables en integrales dobles.

En el caso (par) tenemos:

$$\int_{\Phi} L \;=\; \int_{\Phi_0 \circ \sigma} L \;=\; \int_{\Phi_0} L \,, \tag{68}$$

y en el caso (impar) tenemos:

$$\int_{\Phi} L \;=\; \int_{\Phi_0 \circ \sigma} L \;=\; \begin{cases} \displaystyle\int_{\Phi_0} L & \text{si} \quad \det(D\sigma) \geq 0 \\[2ex] \displaystyle -\int_{\Phi_0} L & \text{si} \quad \det(D\sigma) \leq 0 \end{cases} \tag{69}$$

De todos los integrandos en el caso (par), nos interesamos por los siguientes (hay muchos más):

$$L \;=\; f(x)\,\|\Delta\|_2 \;=\; f(x)\,\sqrt{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\Delta_{ij})^2}\,.$$

La integral $\int_X \|\Delta\|_2$ se llama **área** y las integrales $\int_X f(x)\,\|\Delta\|_2$ se denotan $\int_X f\, d\,$área. Si además $n = 3$ entonces $\int_X f\, d\,\text{área} \;=\; \int_D f\big(\Phi(u)\big)\, \|\Phi_{u_1} \times \Phi_{u_2}\|_2 \, du_1 du_2$.

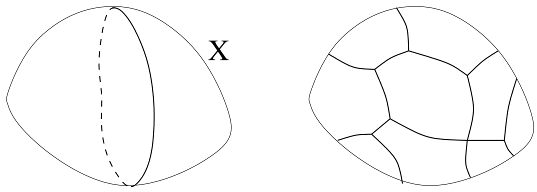
Imitando lo hecho en el capítulo 5, de todos los integrandos en el caso (impar) vamos a estudiar los más obvios:

Definición 151. *Dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una* **2-forma** *o* **forma diferencial de grado 2** *en U es un integrando ω para funciones de dos parámetros $\Phi : D \to U$ que depende linealmente del vector de menores. Esto quiere decir que existen funciones escalares $a_{ij}(x) : U \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i < j \leq n$, tales que:*

$$\omega(x; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \;\equiv\; \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x)\, \Delta_{ij}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\,.$$

Ahora sabemos que todas las 2-formas cumplen las igualdades (69).

Para L en el caso (par) o en el caso (impar), se plantea la cuestión de calcular $\int_X L$ cuando X es una superficie que no se pueda recubrir por una sola parametrización regular y biyectiva (por ejemplo, la esfera S^2). Lo que hacemos es romper X en "parcelas" que sí se parametricen biyectivamente, integramos en cada parcela y sumamos los resultados. Por supuesto, en el caso (impar) damos a cada parcela una parametrización que, además de biyectiva, sea compatible con la orientación de la superficie. Aunque cada parcela esté parametrizada biyectivamente, no prohibimos que haya puntos comunes a dos o más parcelas. Para garantizar que la suma de integrales no depende de la "parcelación" utilizada, es suficiente que los puntos pertenecientes a más de una parcela estén en una unión finita de curvas contenidas en la superficie; la idea es que las parcelas tengan "forma poligonal" y que a lo sumo compartan "lados" o "vértices".



6.5 Número arbitrario de parámetros

Ahora tenemos un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^k$, con k arbitrario pero no mayor que n, y funciones paramétricas $\Phi(u) : W \to \mathbb{R}^n$ que luego restringiremos a regiones acotadas $D \subseteq W$.
Veremos la jacobiana $D\Phi$ indistintamente como matriz "alta" $\big[\, \Phi_{u_1} \,|\, \cdots \,|\, \Phi_{u_k} \,\big]_{n\times k}$ o como una k-upla de columnas $\big(\, \Phi_{u_1} \,,\, \ldots \,,\, \Phi_{u_k} \,\big) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (k factores). Tenemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y escribiremos los integrandos para las $\Phi : W \to U$ indistintamente como funciones del par punto-matriz $L(x, A) = L\big(\, x \,,\, \big[\, \mathbf{v}_1 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{v}_k \,\big]\big)$, y también como funciones escalares $L(x; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ de la $(k+1)$-upla formada por un punto cualquiera $x \in U$ y k vectores columna cualesquiera $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Para cada sucesión creciente de números enteros:

$$i_1, \ldots, i_k \quad \text{con} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \;,$$

hay una función $\Delta_{i_1\cdots i_k}\big(\big[\, \mathbf{v}_1 \,|\, \cdots \,|\, \mathbf{v}_k \,\big]\big) = \Delta_{i_1\cdots i_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ que consiste en el determinante $k \times k$ formado por las filas $i_1, \ldots, i_k$. En total son $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ funciones. Al aplicarlas a la jacobiana $D\Phi$ estas funciones dan los determinantes jacobianos de las proyecciones de Φ:

$$\Delta_{i_1\cdots i_k}(D\Phi) \;=\; \det\big(\, D(\pi_{i_1\cdots i_k} \circ \Phi)\,\big) \;.$$

Definimos $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ como el espacio cuyos vectores se escriben $\mathbf{t} = \big(t_{i_1\cdots i_k}\big)_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}$, siendo los índices de las entradas de $\mathbf{t}$ sucesiones crecientes de k enteros. Por ejemplo, el vector general $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{\binom{4}{3}}$ se escribe $\mathbf{t} = (t_{123}, t_{124}, t_{134}, t_{234})$, siendo los índices de sus entradas ternas crecientes de enteros entre 1 y 4. Asociamos a cada matriz $A_{n\times k}$ su **vector de menores** $\Delta(A) \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ cuyas entradas son $t_{i_1\cdots i_k} = \Delta_{i_1\cdots i_k}(A)$.
Al reparametrizar $\Phi(u) : W \to U$ por $\sigma : \widetilde{W} \to W$, se reparametriza cada proyección $\pi_{i_1\cdots i_k} \circ \Phi$ por el mismo cambio de parámetros $u = \sigma(\widetilde{u})$ y se deduce, igual que en el apartado 6.4, que el vector de menores cambia por la fórmula (64). Es inmediato obtener la (parte de suficiencia de la) siguiente generalización del teorema 150:

Teorema 152. *Para que un integrando $L(x, A)$, para funciones de k parámetros en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, sea paramétrico es necesario y suficiente que exista una función de $n + \binom{n}{k}$ variables $L_0(\, x \,,\, \mathbf{t}\,)$, con $(x, \mathbf{t})$ recorriendo $U \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$, que cumpla las dos condiciones siguientes:*

(a) $\quad L(x, A) \;=\; L_0\,(\, x \,,\, \Delta(A)\,)$.
(b) $\quad L_0$ *positivamente homogénea de grado* 1 *en* $\mathbf{t}$ *:* $\quad c > 0 \Longrightarrow L_0(x, c\,\mathbf{t}) = c\, L_0(x, \mathbf{t})$.

Se demuestra, igual que en el apartado 6.4, que no es posible recuperar la matriz a partir de su vector de menores. Los integrandos para los que existe L_0 cumpliendo (a) son, pues, especiales. Todavía son más especiales los que además cumplen (b).

Dentro de los integrandos paramétricos tenemos, igual que en el apartado 6.4, los casos especiales (par) e (impar) que cumplen, respectivamente, las fórmulas (68) y (69). Entre los de tipo (par) nos interesan los de la forma:

$$L \;=\; f(x)\, \|\Delta\|_2 \;=\; f(x) \sqrt{\sum_{1\leq i_1<\cdots i_k\leq n} \big(\Delta_{i_1\cdots i_k}\big)^2} \;.$$

La integral $\int_X \|\Delta\|_2$ se llama **área** (k-dimensional). Las integrales $\int_X f(x)\, \|\Delta\|_2$ se denotan $\int_X f \; d\,\text{área}$ y hay una fórmula alternativa para calcularlas:

$$\int_X f \; d\,\text{área} \;=\; \int_D f\big(\Phi(u)\big) \sqrt{\det\big((D\Phi)^t D\Phi\big)}\; du_1 \cdots du_k \;. \tag{70}$$

¡Cuidado! La matriz **pequeña** $(D\Phi)^t D\Phi \in \mathrm{M}_{k\times k}$ y la **grande** $D\Phi(D\Phi)^t \in \mathrm{M}_{n\times n}$ tienen ambas el mismo rango que $D\Phi$, o sea a lo sumo k. Por lo tanto $\det\big(D\Phi(D\Phi)^t\big) \equiv 0$ salvo en el caso $k = n$, en el cual D es una región de $\mathbb{R}^n$, $\sqrt{\det\big((D\Phi)^t D\Phi\big)} = \sqrt{\det\big(D\Phi(D\Phi)^t\big)} = |\det(D\Phi)|$ y (70) es entonces la fórmula usual de cambio de variables en integrales múltiples.

Entre los integrandos paramétricos de tipo (impar), vamos a estudiar los más obvios:

Definición 153. *Dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, una* **k-forma** *o* **forma diferencial de grado k** *en U es un integrando ω para funciones de k parámetros $\Phi : D \to U$ que depende linealmente del vector de menores. Esto quiere decir que existen funciones escalares $a_{i_1 \cdots i_k}(x) : U \to \mathbb{R}$, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, tales que:*

$$\omega(x; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \cdots i_k}(x)\, \Delta_{i_1 \cdots i_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \,. \tag{71}$$

*Una **0-forma en** U es, sencillamente, una función escalar $a(x) : U \to \mathbb{R}$.*

La integral de una k-forma sobre una función paramétrica $\Phi : D \to U$ está dada por la fórmula:

$$\int_\Phi \omega = \int_{u \in D} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k}\big(\Phi(u)\big) \cdot \Delta_{i_1 \ldots i_k}(D\Phi_u) \;\; du_1 \cdots du_k \,. \tag{72}$$

Todas las k-formas cumplen las igualdades (69), que ahora escribimos así:

$$\boxed{\int_{\Phi \circ \sigma} \omega = \begin{cases} \displaystyle\int_\Phi \omega & \text{si } \sigma \text{ conserva la orientación} \\[2ex] \displaystyle -\int_\Phi \omega & \text{si } \sigma \text{ invierte la orientación} \end{cases}} \tag{73}$$

compáralas con las fórmulas (57) del apartado 5.4.

En cuanto a cómo se calcula $\int_X L$ en el caso (par), y como se calcula $\int_{(X,\mathcal{O})} L$ en el caso (impar), aquí valen los mismos comentarios hechos al final del apartado 6.4 con sólo una ligera modificación: ahora los puntos que pertenecen a más de una parcela forman una unión finita de variedades de dimensiones menores que k y contenidas en X. La idea es que las parcelas tengan "forma poliédrica" y que a lo sumo compartan "caras de dimensiones menores", empezando con caras de dimensión $k-1$ y llegando hasta aristas y vértices.

6.6 Funciones alternadas y k-formas

Sea E espacio vectorial y E^k el espacio $E \times \cdots \times E$ de las k-uplas $(v_1, \ldots v_k)$ de vectores de E.

Teorema-definición 154. *Dada $\varphi : E^k \to \mathbb{R}$ multilineal, son equivalentes:*

(a) Se anula siempre que hay un vector repetido:

$$\varphi(\, v_1, \ldots, v_{i-1} \,,\, \mathbf{v} \,,\, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1} \,,\, \mathbf{v} \,,\, v_{j+1}, \ldots, v_k \,) = 0 \,.$$

(b) Si intercambiamos dos vectores, el valor de φ se multiplica por -1:

$$\begin{aligned} &\varphi(\, v_1, \ldots, v_{i-1} \,,\, \mathbf{w} \,,\, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1} \,,\, \mathbf{v} \,,\, v_{j+1}, \ldots, v_k \,) = \\ &= -\varphi(\, v_1, \ldots, v_{i-1} \,,\, \mathbf{v} \,,\, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1} \,,\, \mathbf{w} \,,\, v_{j+1}, \ldots, v_k \,) \,. \end{aligned}$$

(c) Para cualquier permutación $\sigma \in S_k$ se tiene:

$$\varphi\big(\, v_{\sigma(1)} \,,\, \ldots \,,\, v_{\sigma(k)} \,\big) = \operatorname{sig}(\sigma) \cdot \varphi(v_1, \ldots, v_k) \,.$$

A las φ que cumplen estas condiciones las llamamos **funciones multilineales alternadas,** *o simplemente* **funciones alternadas.** *El* **grado** *de dichas funciones es el número k de variables vector sobre las que actúan. Fijados E y k, el conjunto de todas estas funciones es un espacio vectorial que denotaremos $\mathcal{A}^k(E)$.*

Dadas dos formas lineales $\ell_1, \ell_2 : E \to \mathbb{R}$, contruimos a partir de ellas la siguiente función:

$$\Delta(\ell_1, \ell_2) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \Delta(\ell_1, \ell_2)\,(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_1(v_1)\,\ell_2(v_2) - \ell_1(v_2)\,\ell_2(v_1) \;=\; \begin{vmatrix} \ell_1(v_1) & \ell_2(v_1) \\ \ell_1(v_2) & \ell_2(v_2) \end{vmatrix} \;,$$

y se ve de inmediato que es bilineal alternada, es decir $\Delta(\ell_1, \ell_2) \in \mathcal{A}^2(E)$.
En general, dadas $\ell_1, \dots \ell_k : E \to \mathbb{R}$ lineales se define la función $\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) \in \mathcal{A}^k(E)$ mediante:

$$\Delta(\ell_1, \dots, \ell_k) : E^k \to \mathbb{R} \quad , \quad \Delta(\ell_1, \dots, \ell_k)\,(v_1, \dots, v_k) \;=\; \det\big(\ell_i(v_j)\big)_{k \times k} \,.$$

Teorema 155. *Sea* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *una base de* E *y sean* $\ell_1, \dots, \ell_n : E \to \mathbb{R}$ *las correspondientes* **funciones coordenadas,** *es decir que* $\ell_i(\, a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \,) \equiv a_i$ *para* $i = 1, \dots, n$. *Entonces el conjunto:*

$$\mathcal{B}_k \;=\; \big\{\, \Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \,\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$$

es una base de $\mathcal{A}^k(E)$. *En particular* $\dim \mathcal{A}^k(E) = \binom{n}{k}$.
Además, dada $\varphi \in \mathcal{A}^k(E)$ *su* ***único*** *desarrollo como combinación lineal de esa base es:*

$$\varphi \;=\; \sum_{1 \le i_1 < \cdots i_k \le n} \varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})\,\Delta(\ell_{i_1}, \dots, \ell_{i_k}) \,. \tag{74}$$

Para la demostración véase el apartado 6.11.
Hagamos con cada k-forma ω en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ como en la definicón 126 del apartado 5.1: veamos ω indistintamente como una función de $k+1$ variables $\omega(x; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) : U \times \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R}$ y como un **campo** que a cada punto $x \in U$ asocia una función $\omega_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) : \big(\mathbb{R}^n\big)^k \to \mathbb{R}$, que por la fórmula (71) y el teorema 155 es, en realidad, una forma alternada de grado k.

Una k-forma ω en U es un **campo de funciones alternadas de grado** k en U: a cada punto $x \in U$ le asocia una función alternada ω_x de grado k.

y la fórmula (72) para la integral de una k-forma ω podemos escribirla así:

$$\boxed{\int_\Phi \omega \;=\; \int_{u \in D} \omega_{\Phi(u)}\,(\Phi_{u_1}, \dots, \Phi_{u_k})\; du_1 \cdots du_k} \tag{75}$$

Sabemos ahora, además, que para cada punto $x \in U$ los números $a_{i_1 \cdots i_k}(x)$ que hacen verdadero el desarrollo (71) son únicos y vienen dados por

$$a_{i_1 \cdots i_k}(x) \;=\; \omega_x(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k}) \,. \tag{76}$$

Las operaciones algebraicas se extienden de la manera obvia a campos, simplemente se hacen punto a punto:

– Si $a : U \to \mathbb{R}$ es función escalar y $\mathbf{C}$ un campo (de cualquier tipo) en U, entonces $a\mathbf{C}$ es el campo $U \ni x \longmapsto a(x)\mathbf{C}_x$.

– Si $\omega_1, \dots, \omega_k$ son formas de Pfaff en U, entonces $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_k)$ es la k-forma en U que a cada $x \in U$ le asocia $\Delta(\omega_{1x}, \dots, \omega_{kx})$.

– Si ω es una k-forma y $V_1, \dots, V_k$ son **campos de vectores,** todos definidos en U, entonces $\omega(V_1, \dots, V_k)$ es la función escalar $U \ni x \longmapsto \omega_x(V_{1x}, \dots, V_{kx})$.

Entonces las fórmulas (71) y (76) se juntan en la siguiente identidad entre campos:

$$\omega \;\equiv\; \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega\,(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})\;\Delta\big(\, dx_{i_1} \,,\, \dots \,,\, dx_{i_k} \,\big) \,, \tag{77}$$

que además indica las *únicas* funciones coeficiente que dan el desarrollo de ω como combinación lineal de las "k-formas básicas" $\Delta\big(\, dx_{i_1} \,,\, \dots \,,\, dx_{i_k} \,\big)$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.

6.7 Producto exterior

Teorema-definición 156. *Dado un espacio vectorial E, existe una operación binaria $\wedge$ entre funciones alternadas que tiene las siguientes propiedades :*
(1) Si $\varphi : E^k \to \mathbb{R}$ y $\psi : E^h \to \mathbb{R}$ son alternadas de grados respectivos k y h entonces $\varphi \wedge \psi : E^{k+h} \to \mathbb{R}$ es alternada de grado $k+h$.
(2) Bilineal:

distributiva por la izquierda: $(\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi + \varphi_2 \wedge \psi$,
distributiva por la derecha: $\varphi \wedge (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \wedge \psi_1 + \varphi \wedge \psi_2$,
y tal que $\left.\begin{array}{c} (c\varphi) \wedge \psi \\ \varphi \wedge (c\psi) \end{array}\right\} = c\,(\varphi \wedge \psi)$.

(2) Si $\ell_1, \ldots, \ell_{k+h} : E \to \mathbb{R}$ son formas lineales entonces

$$\Delta(\ell_1, \ldots, \ell_k) \wedge \Delta(\ell_{k+1}, \ldots, \ell_{k+h}) = \Delta(\ell_1, \ldots, \ell_{k+h}) . \tag{78}$$

La operación $\wedge$ se llama **multiplicación exterior** *o* **producto exterior.**

Para la demostración véase el apartado 6.11.

La multiplicación exterior es única. Para demostrarlo fijemos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de E y sean $\ell_1, \ldots, \ell_n$ las correspondientes funciones coordenadas. Dadas dos formas alternadas

$$\varphi = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k}\, \Delta(\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_k}) \quad , \quad \psi = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_h \le n} b_{j_1 \cdots j_h}\, \Delta(\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_h}) \, ,$$

por la unicidad de los coeficientes, garantizada por el teorema 155, y la la bilinealidad de $\wedge$, efectuar el producto $\varphi \wedge \psi$ se reduce a hacer los productos $\Delta(\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_k}) \wedge \Delta(\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_h})$, que están fijados por (78).
La multiplicación exterior es asociativa. Para empezar, los productos de elementos básicos

$$\Big(\Delta(\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_k}) \wedge \Delta(\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_h}) \Big) \wedge \Delta(\ell_{l_1}, \ldots, \ell_{l_s}) \, ,$$

$$\Delta(\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_k}) \wedge \Big(\Delta(\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_h}) \wedge \Delta(\ell_{l_1}, \ldots, \ell_{l_s}) \Big) \, ,$$

son ambos iguales a $\Delta(\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_k}, \ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_h}, \ell_{l_1}, \ldots, \ell_{l_s})$. Esta asociatividad se traspasa, por la bilienalidad, a un producto de tres combiaciones de elementos básicos; o sea a *cualquier* producto de tres formas alternadas.
De la asociatividad y (78) de deducimos que para formas lineales cualesquiera $\ell_1, \ldots, \ell_k$ se tiene:

$$\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k = \Delta(\ell_1, \ldots, \ell_k) \, .$$

Las formas alternadas del tipo $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$ se llaman **monomios.** No volveremos a utilizar la notación $\Delta(\ell_1, \ldots, \ell_k)$ para escribirlos.
Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, las diferenciales $(dx_i)_x$ son las coordenadas lineales $(c_1, \ldots, c_n) \mapsto c_i$ y las formas alternadas

$$(dx_{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_x \quad , \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \, ,$$

forman la base de $\mathcal{A}^k\big(\mathbb{R}^n\big)$ que el teorema 155 asocia con la base estándar de $\mathbb{R}^n$. No volveremos a escribirlas como $\Delta_{i_1 \cdots i_k}$.
Para campos hacemos el producto exterior punto a punto, es decir que si ω es una k-forma y η es una h-forma, ambas en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\omega \wedge \eta$ es la $(k+h)$-forma en U que a cada punto $x \in U$ asocia la forma alternada $\omega_x \wedge \eta_x$.
Cuando hablamos de k-formas, llamamos **monomios** a las que se pueden escribir $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ con $\omega_1, \ldots, \omega_k$ formas de Pfaff. Entre éstos tenemos los monomios básicos $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. De ahora para siempre, la fórmula (77) la escribiremos así:

$$\boxed{\omega \equiv \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega\,(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}} \tag{79}$$

El producto $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$ sí que puede variar al reordenar sus factores. Lo primero que observamos es que dos formas lineales *anticonmutan:*

$$\ell_2 \wedge \ell_1 \;=\; -\ell_1 \wedge \ell_2 \;.$$

Algunas consecuencias prácticas que esto tiene son:

a) Si en el producto $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$ hay un factor repetido, entonces el producto es nulo.

b) Las formas de grado par conmutan con *todas* las formas diferenciales.

c) Si ω_1 y ω_2 tienen grados impares (iguales o distintos) entonces $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$.

Efectuar un producto exterior es fácil en general, porque a) hace que muchos de los monomios sean nulos. En el siguiente ejemplo, de los cuatro monomios que forman el producto sólo queda uno porque los otros tres son obviamente nulos:

$$(dx_1 \wedge dx_2 + a\, dx_3 \wedge dx_4) \wedge (b\, dx_2 \wedge dx_4 + c\, dx_1 \wedge dx_7) \;=\; ac\, dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_7 \;.$$

Podemos reordenar el resultado como $ac\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_7$, sin cambio de signo porque dx_1 ha saltado por encima de $dx_3 \wedge dx_4$, que es de grado par y por lo tanto conmuta con todo.

Si ω es de grado impar entonces $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$, por lo tanto $\omega \wedge \omega = 0$.
También se tiene $\omega \wedge \omega = 0$ si ω es un monomio, de cualquier grado.
No es nada obvio que una función alternada sea un monomio, o que no lo sea. Por ejemplo el "trinomio" $5\, dx_1 \wedge dx_2 - 2\, dx_1 \wedge dx_3 + 3\, dx_2 \wedge dx_3$ resulta ser $(2\, dx_1 - 3\, dx_2) \wedge (dx_1 + dx_2 - dx_3)$ y sí es un monomio. En cambio el "binomio" $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ tiene cuadrado exterior distinto de cero en todo punto:

$$\omega \wedge \omega \;=\; 0 \;+\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;+\; dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \;+\; 0 \;=\; 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;,$$

y por lo tanto ω_x no es un monomio para ningún punto x.

6.8 Derivación exterior

Definición 157. *Dados un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y una k-forma ω en U, la* **derivada exterior** *de ω es una $(k+1)$-forma $d\omega$ en U que se calcula según la siguiente regla:*

$$d \left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \;=\; \sum da_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \;. \qquad (80)$$

Para una 0-forma, es decir una función escalar $f : U \to \mathbb{R}$, su derivada exterior es el campo diferencial df de la definición 126 del capítulo 5.

Para una forma de Pfaff $\omega \equiv a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$ la derivada exterior es una 2-forma:

$$d\omega \;\equiv\; da_1 \wedge dx_1 + \cdots + da_n \wedge dx_n \;\equiv\; \sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij}(x)\; dx_i \wedge dx_j \;.$$

Fijados $i < j$, al término $b_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ sólo pueden contribuir los sumandos $da_i \wedge dx_i$ y $da_j \wedge dx_j$; el primero aporta $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i = -\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j$ mientras que el segundo aporta $\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_j$. Entre los dos contribuyen con $\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$. En definitiva:

$$d\,(\, a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \,) \;=\; \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \;. \qquad (81)$$

Una forma de Pfaff ω es cerrada si y sólo si $d\omega \equiv 0$.
En particular $d(da) \equiv 0$ para toda función escalar $a(x) \in \mathcal{C}^2$.

Ahora vamos a eliminar unas rigideces que tiene la regla de cálculo (80). Una de ellas es que exige que los índices $i_1,\ldots,i_k$ estén en orden creciente.

Lema 158. *Para cualquier secuencia $i_1,\ldots,i_k$, incluso con repeticiones, se tiene:*

$$d\big(\,a(x)\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\big) \;=\; da\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\;. \tag{82}$$

Demostración. Si en $i_1,\ldots,i_k$ hay alguna repetición entonces los dos miembros de (82) son idénticamente nulos y la igualdad es trivialmente cierta.
Supongamos que no hay ninguna repetición en $i_1,\ldots,i_k$ y sea $j_1,\ldots,j_k$ el resultado de poner la secuencia en orden creciente. Existe un $\varepsilon\in\{1,-1\}$ tal que

$$dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\;\equiv\;\varepsilon\cdot dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}\;,$$

luego $a\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\equiv(\varepsilon a)\,dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}$, pero la regla (80) se puede aplicar al segundo miembro de esta última identidad, deduciéndose:

$$\begin{aligned} d\big(\,a\;dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\big) \;&=\; \varepsilon\,da\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}\;= \\ =\;\; da\wedge(\,\varepsilon\cdot dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_k}\,)\;&=\; da\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\;, \end{aligned}$$

y queda demostrada (82). □

Otra rigidez de la regla (80) es que sólo permite monomios formados por diferenciales de las coordenadas estándar $x_1,\ldots,x_n$. Para quitarla necesitamos un par de fórmulas y un lema.

$$\boxed{a(x)\;\text{ función escalar }\;\Longrightarrow\; d\,(a\,\eta)\;=\;da\wedge\eta\,+\,a\,d\eta} \tag{83}$$

La demostración de (83) se deja como ejercicio. Atención al signo en la siguiente fórmula:

$$\boxed{\omega\;\text{ forma de Pfaff }\;\Longrightarrow\; d\,(\omega\wedge\eta)\;=\;(d\omega)\wedge\eta\,-\,\omega\wedge d\eta} \tag{84}$$

Demostración. Supongamos primero que ω y η son así: $\omega\equiv a(x)\,dx_i$, $\eta\equiv b(x)\,dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}$. Usando la fórmula (82), calculamos:

$$d\,(\omega\wedge\eta)\;=\;d\big(\,(ab)\,dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}\big)\;=\;(\,b\,da+a\,db\,)\wedge dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}\;,$$

de donde:

$$\begin{aligned} d\,(\omega\wedge\eta)\;&=\;b\,da\wedge dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}\;+\;a\,db\wedge dx_i\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}\;= \\ =\;\;(da)\wedge dx_i\wedge(\,b\,dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}\,)&-a\,dx_i\wedge(\,db\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_h}\,)=(d\omega)\wedge\eta\;-\;\omega\wedge d\eta\,. \end{aligned}$$

En el caso general es $\omega\equiv\sum\omega_i$ y $\eta\equiv\sum\eta_\alpha$, sumas de monomios como los del cálculo anterior. Para cada par (i,α) se tiene $d(\omega_i\wedge\eta_\alpha)=(d\omega_i)\wedge\eta_\alpha-\omega_i\wedge d\eta_\alpha$; la suma de los miembros de la izquierda de estas igualdades da por resultado $d(\omega\wedge\eta)$ y la suma de los miembros de la derecha da por resultado $(d\omega)\wedge\eta-\omega\wedge d\eta$. Como hay igualdad sumando a sumando, los dos resultados son iguales. □

Lema 159. *Para funciones cualesquiera $a(x)\in\mathcal{C}^1$ y $a_1(x),\ldots,a_k(x)\in\mathcal{C}^2$, tenemos la siguiente generalización de (82):*

$$\boxed{d\big(\,a\,da_1\wedge\cdots\wedge da_k\big)\;=\;da\wedge da_1\wedge\cdots\wedge da_k} \tag{85}$$

Demostración. Aplicando (84) varias veces, junto con $d(da_j)=0$, deducimos:

$$d\,(da_1\wedge\cdots\wedge da_k)\;=\;0\;,$$

lo que junto con (83) produce (85). □

Ahora ya podemos calcular derivadas exteriores con comodidad.

6.9 Lema de Poincaré

Definición 160. *Sea ω una k-forma en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que ω es* **cerrada** *si $d\omega \equiv 0$. Decimos que ω es* **exacta en** *U si existe una $(k-1)$-forma η en U tal que $\omega \equiv d\eta$.*

Teorema 161. (Lema de Poincaré). *Una forma diferencial, de cualquier grado positivo, es cerrada si y sólo si es localmente exacta. En un abierto* ***convexo*** *toda forma diferencial cerrada es exacta.*

En particular $d(d\eta) = 0$ para toda forma diferencial η de clase $\mathcal{C}^2$, lo que suele resumirse así:

$$\boxed{d \circ d \;=\; 0} \tag{86}$$

Demostración. La igualdad $d(d\eta) = 0$ basta demostrarla para $\eta \equiv a(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$:

$$d\, d\big(\, a(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \big) \;=\; d\,(\, da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\,) \;=\; d(da) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ ,$$

que es cero porque $d(da) = 0$.
Sea ahora $U \subset \mathbb{R}^n$ y ω una k-forma cerrada en U. Suponiendo U convexo, vamos a describir un método explícito para calcular una $(k-1)$-forma η en U tal que $d\eta = \omega$.

Primer paso. De todo el desarrollo $\omega \equiv \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ separamos los términos que contienen dx_1 y, si hace falta, los reordenamos para que el factor dx_1 quede en primer lugar: los $a_{1 i_2 \ldots i_k}\, dx_1 \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, y calculamos funciones $\widetilde{a}_{1 i_2 \ldots i_k}$ tales que:

$$\frac{\partial\, \widetilde{a}_{1 i_2 \ldots i_k}}{\partial x_1} \;=\; a_{1 i_2 \ldots i_k}\ ,$$

lo cual es posible porque U es convexo. Con estas funciones formamos la $(k-1)$-forma:

$$\eta_1 \;=\; \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_k \leq n} \widetilde{a}_{1 i_2 \ldots i_k}\, dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ ,$$

y consideramos la diferencia $\omega_1 = \omega - d\eta_1$ que, siendo diferencia de una cerrada menos una exacta, es cerrada. Además, por la manera en que la hemos construido, no contiene dx_1:

$$\omega_1 \;=\; \sum_{\mathbf{2}\, \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} b_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ .$$

Dados $2 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, el término (función) $\cdot\, dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ del desarrollo de $d\omega_1$ es nulo y a él sólo contribuyen las derivadas de los términos $b_{j_1 \ldots j_k}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ con $\{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, i_1, \ldots, i_k\}$, que son los $0 \cdot dx_1 \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{h-1}} \wedge dx_{i_{h+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$, idénticamente nulos, y el $b_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Por lo tanto sólo contribuye la derivada del término $b_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, luego:

$$0 \;=\; (\text{función}) \cdot dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \;=\; \frac{\partial\, b_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ .$$

Esto prueba que $\dfrac{\partial\, b_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_1} \equiv 0$ para todas las funciones coeficiente $b_{i_1 \ldots i_k}$ del desarrollo de ω_1. Como U es convexo, esto implica que son funciones independientes de x_1: $b_{i_1 \ldots i_k}(x_2, \ldots, x_n)$ y llegamos a que

$$\omega_1 \;=\; \sum_{\mathbf{2}\, \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} b_{i_1 \ldots i_k}(\, x_{\mathbf{2}}\, ,\, \ldots\, ,\, x_n\,)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\ ,$$

es una k-forma que no contiene x_1 *en ningún sitio.*

Segundo paso. Ahora tomamos los términos del desarrollo de ω_1 que contienen dx_2, poniendo ese factor en primer lugar, e integramos sus funciones coeficiente respecto de x_2, *pero cuidando de que las integrales indefinidas no dependan de* x_1, y formamos con esas nuevas funciones una

$(k-1)$-forma η_2 en U. Esta forma diferencial η_2 no contiene x_1 en ningún sitio y, por lo tanto, tampoco lo hace $d\eta_2$. Además la diferencia

$$\omega_2 \;=\; \omega_1 - d\eta_2 \;=\; \omega - d\eta_1 - d\eta_2 \;,$$

no contiene x_1 ni x_2 en ningún sitio y es cerrada.

Paso general. Partiendo de ω_r, cerrada y que no contiene $x_1, \ldots, x_r$ en ningún sitio, hallamos una $(k-1)$-forma η_{r+1} tal que $\omega_{r+1} = \omega_r - d\eta_{r+1}$ no contiene $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$ en ningún sitio y, siendo diferencia de una cerrada menos una exacta, es cerrada.

Paso final. Cuando hayamos hecho $n-k$ pasos tenemos ω_{n-k} que solamente contiene las k últimas coordenadas $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ y se desarrolla con un solo monomio:

$$\omega_{n-k} \;=\; \omega - d\eta_1 - d\eta_2 - \cdots - d\eta_{n-k} \;=\; c\,(\, x_{n-k+1}\,,\; \ldots\;,\; x_n\,)\; dx_{n-k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \;.$$

Tomamos una integral indefinida de c: $\dfrac{\partial\, \widetilde{c}}{\partial x_{n-k+1}} = c$, cuidando que no dependa de $x_1, \ldots, x_{n-k}$, hacemos $\eta_{n-k+1} = \widetilde{c}\; dx_{n-k+2} \wedge \cdots \wedge dx_n$ y conseguimos $\omega_{n-k} = d\eta_{n-k+1}$. Finalmente:

$$\omega \;=\; d(\, \eta_1 + \cdots + \eta_{n-k} + \eta_{n-k+1}\,)\;.$$

$\square$

6.10 Pullback de formas diferenciales

Definición 162. *Sean $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m_u$ y $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n_x$ abiertos, $f : U_1 \to U_2$ una aplicación diferenciable escrita como $x = f(u)$ y ω una k-forma en U_2. El* **pullback de** ω **por** f *es la k-forma $f^*\omega$ en U_1 definida de la siguiente manera:*

$$\text{para}\;\; u \in U_1 \;\;\text{y}\;\; v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m \;\;\text{es}\;\; (f^*\omega)_u(v_1, \ldots, v_k) \;=\; \omega_{f(u)}\big(\,(df)_u v_1\,,\;\ldots\;,\;(df)_u v_k\,\big)\;.$$

Si $k = 0$ entonces $\omega \equiv a(x) : U_2 \to \mathbb{R}$ es una función escalar y definimos $f^*a \equiv a \circ f$.

Se dice “pullback”, que significa “resultado de tirar hacia atrás”, por razones visuales:

> Si mirando la flecha $U_1 \to U_2$ nos imaginamos que f “empuja” los puntos de U_1 hacia U_2. Entonces nos tenemos que imaginar que esa misma f “tira” de ω, que está en U_2, y la trae a una forma diferencial en U_1. Así $f^*\omega$ es “la traída de ω por f”.

El pullback $f^*\omega$ es fácil de calcular a partir de la expresión de ω en coordenadas:

$$\omega \;\equiv\; \sum a_{i_1 \ldots i_k}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\;, \tag{87}$$

y de las funciones que definen la aplicación: $f(u) \;\equiv\; \big(\, x_1(u)\,,\;\ldots\;,\; x_n(u)\,\big)$. Se repite lo dicho en el apartado 5.5: se sustituye en (87) cada x_j por la función $x_j(u)$, se hacen las operaciones y se reagrupa.
Veamos un ejemplo. Consideramos la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$: $\omega \equiv e^z\, dx \wedge dy$ y la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z) \;=\; f(u_1, u_2) \;=\; \big(\; \operatorname{sen} u_1\,,\; 3u_1 - u_2^2\,,\; 2\,u_2\,\big)\;,$$

entonces:

$$\begin{aligned} f^*\omega \;&\equiv\; e^{2u_2}\,(d \operatorname{sen} u_1) \wedge d\left(3u_1 - u_2^2\right) \;\equiv \\ &\equiv\; e^{2u_2}\,(\cos u_1)\, du_1 \wedge (\, 3\, du_1 - 2u_2\, du_2\,) \;\equiv\; -2\, u_2\, e^{2u_2}\,(\cos u_1)\, du_1 \wedge du_2\;. \end{aligned}$$

Veamos cómo el pullback ayuda a plantear la integración de formas diferenciales. El número combinatorio $\dbinom{k}{k}$ es igual a 1. Si $\dim E = k$ y $\ell_1, \ldots, \ell_k : E \to \mathbb{R}$ son funciones coordenadas respecto de una base, entonces el espacio $\mathcal{A}^k(E)$ tiene una base de un solo elemento: $\ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k$, y toda forma alternada $\varphi : E^k \to \mathbb{R}$ admite una expresión:

$$\varphi \;=\; \text{cte} \cdot \ell_1 \wedge \cdots \wedge \ell_k \;.$$

Correspondiendo a eso, las k-formas en un abierto de $\mathbb{R}^k_u$ son muy sencillas, pues se expresan con un solo monomio y una sola función coeficiente:

$$\omega_0 \;\equiv\; a(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \quad , \quad a(u) \;\equiv\; \omega_0\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \;.$$

Definición 163. *Sea $\omega_0 \equiv a(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ una* **k**-*forma en un abierto $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{k}}_u$. Para toda región acotada $D \subseteq U_0$, definimos la* **integral de ω_0 sobre D** *de la siguiente manera:*

$$\int_D \omega_0 \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int_D \omega_{0u}\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\, du_1 \cdots du_k \;,$$

que es lo mismo que escribir:

$$\int_D a(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \int_D a(u)\, du_1 \cdots du_k \;.$$

Importante: El orden de los vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ en la primera fórmula es fundamental, por lo cual el orden de los factores du_j en $a(u)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ también lo es.

Si ω es una k-forma en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n_x$ y $\Phi(u) : U_0 \to U$ es una función de k parámetros, entonces:

$$(\Phi^*\omega)_u\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \;=\; \omega_{\Phi(u)}\big(\,(d\Phi)_u \mathbf{e}_1\,,\,\ldots\,,\,(d\Phi)_u \mathbf{e}_k\,\big) \;=\; \omega_{\Phi(u)}\,(\Phi_{u_1}\,\ldots, \Phi_{u_k})\;,$$

luego $\Phi^*\omega \equiv \omega_{\Phi(u)}\,(\Phi_{u_1}\,\ldots, \Phi_{u_k})\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$ y la fórmula (75) del apartado 6.6 se escribe:

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int_\Phi \omega \;=\; \int_D \Phi^*\omega \\ \text{Para integrar una } k\text{-forma } \omega \text{ sobre una función } \mathbb{R}^k \supseteq D \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^n \\ \text{se hace el pullback } \Phi^*\omega \text{ y se integra éste sobre la región } D\,. \end{array}} \tag{88}$$

Las siguientes identidades muestran cómo interactúa el pullback con las operaciones algebraicas:

$$\boxed{f^*(\omega_1 + \omega_2) \;=\; f^*\omega_1 + f^*\omega_2 \;\;,\;\; f^*(a\omega) \;=\; (a \circ f) f^*\omega \;\;,\;\; f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) \;=\; f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2} \tag{89}$$

Si tenemos abiertos $U_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2, 3$, aplicaciones diferenciables $U_1 \xrightarrow{f} U_2 \xrightarrow{g} U_3$ y una forma diferencial ω en U_3, podemos *traerla* a la forma $g^*\omega$ definida en U_2 y después *traer* $g^*\omega$ a la forma $f^*(g^*\omega)$, que está definida en U_1.

$$\begin{array}{ccccc} f^*(g^*\omega) & \longleftarrow\!\!\shortmid & g^*\omega & \longleftarrow\!\!\shortmid & \omega \\ & & & & \\ U_1 & & U_2 & & U_3 \end{array}$$

También podemos usar $g \circ f : U_1 \to U_3$ para directamente *traer* ω a la forma diferencial $(g \circ f)^*\omega$ definida en U_1. Pues bien:

$$\boxed{(g \circ f)^*\omega \;=\; f^*(g^*\omega)} \tag{90}$$

Veamos ahora cómo interactúa el pullback con la derivación exterior.

Teorema 164. *Sean $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m_u$ y $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n_x$ abiertos y $f : U_1 \to U_2$ aplicación de clase $\mathcal{C}^2$. Para toda forma diferencial ω en U_2 se tiene:*

$$\boxed{d\,(f^*\omega) \;=\; f^*\, d\omega} \tag{91}$$

Demostración. Empezamos con el caso en que $\omega \equiv b(x) : U_2 \to \mathbb{R}$ es una 0-forma. Para cada punto $u \in U_1$ y cualquier $v \in \mathbb{R}^k$ tenemos:

$$d(f^*b)_u(v) \;=\; d(b \circ f)_u(v) \;=\; (db)_{f(u)}\big((df)_u v\big) \;=\; \big(f^*(db)\big)_u(v)\,,$$

queda probado que $d(f^*b) \equiv f^*(db)$.
En el caso $k \geq 1$, tomamos $\omega \equiv \sum a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ y la descripción de la aplicación: $x = f(u) \equiv \big(\, f_1(u)\,,\, \ldots\,,\, f_n(u)\big)$ donde, por hipótesis, cada f_j es de clase $\mathcal{C}^2$. Por el caso $k = 0$, para cada i vemos que $f^*(dx_i) = d(x_i \circ f) = df_i$ y, por (89), para cada secuencia $i_1, \ldots, i_k$ es:

$$f^*\big(\, a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\big) \;=\; (a_{i_1 \ldots i_k} \circ f)\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}\,,$$

de donde, utilizando (85) y (89), sacamos:

$$\begin{aligned} d\,(f^*\omega) \;&=\; \sum d\,\big(\,(a_{i_1 \ldots i_k} \circ f)\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}\big) \;=\; \sum d\,(a_{i_1 \ldots i_k} \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k} \;= \\ &=\; f^* \sum (d\, a_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \;=\; f^*\, d\omega\,. \end{aligned}$$

□

6.11 Demostraciones

Demostración de la proposición 141.
Primera parte. Sean $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ dos orientaciones de X tales que el conjunto

$$Y \;=\; \big\{\, p \in X \,:\, \mathcal{O}_{1p} \;=\; \mathcal{O}_{2p}\big\}\,,$$

contiene un punto p_0, o sea no es vacío.
Veamos que Y es un abierto relativo de X. Dado $p \in Y$ podemos elegir una base $\mathcal{B}_p$ de T_pX que define la orientación $\mathcal{O}_{1p} = \mathcal{O}_{2p}$. Para $q \in X$ cercano a p, hay dos bases $\mathcal{B}_{1q}, \mathcal{B}_{2q}$ ambas muy cercanas a $\mathcal{B}_p$ y definiendo $\mathcal{O}_{1p}$ y $\mathcal{O}_{2p}$, respectivamente. Pero entonces $\mathcal{B}_{1p}$ es cercana a $\mathcal{B}_{2p}$ y la matriz de paso entre ellas, cercana a la identidad I_k, tiene determinante positivo. Esto prueba que $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ coinciden en puntos cercanos a p, es decir que Y contiene todo un entorno de p en X. Como p era un punto arbitrario de Y, queda probado que Y es un abierto relativo de X.
Veamos que $X \setminus Y$ también es un abierto relativo de X. Dado $p' \in X \setminus Y$, las orientaciones $\mathcal{O}_{1p'}$ y $\mathcal{O}_{2p'}$ de $T_{p'}X$ se definen por bases respectivas $\mathcal{B}_{1p'}, \mathcal{B}_{2p'}$ con matriz de paso P tal que $\det P < 0$. Para $q \in X$ cercano a p' tenemos bases $\mathcal{B}_{1q}, \mathcal{B}_{2q}$ que definen $\mathcal{O}_{1q}$ y $\mathcal{O}_{2q}$, respectivamente, con $\mathcal{B}_{1q}$ muy cercana a $\mathcal{B}_{1p'}$ y $\mathcal{B}_{2q}$ muy cercana a $\mathcal{B}_{2p'}$. La matriz de paso de $\mathcal{B}_{1q}$ a $\mathcal{B}_{2q}$ es cercana a P y tiene determinante negativo, luego $\mathcal{O}_{1q} \neq \mathcal{O}_{2q}$ y $q \in X \setminus Y$. Esto prueba que $X \setminus Y$ contiene un entorno de p' en X, luego es un abierto relativo porque p' era un punto arbitrario suyo.
Como X es conexa por caminos, el conjunto Y tiene que ser o vacío o toda X. Pero Y no es vacío por hipótesis, luego $Y = X$ y $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

Segunda parte. Sean ahora $W \subseteq \mathbb{R}^k$ abierto conexo por caminos y $\Phi : W \to X$ una parametrización regular, donde X es una variedad orientable en la que hemos elegido una orientación $\mathcal{O}$. Definimos el conjunto $W_0 \subseteq W$ formado por los $u \in W$ tales que la base ordenada $\{\Phi_{u_1}(u), \ldots, \Phi_{u_k}(u)\}$ define la orientación $\mathcal{O}_{\Phi(u)}$ de $T_{\Phi(u)}X$. Suponemos que hay un $u_0 \in W_0$.
Se demuestra, de manera análoga a lo hecho en la primera parte, que W_0 es abierto y cerrado relativo de W. Como W es conexo y W_0 no vacío, tiene que ser $W_0 = W$. Esto significa que Φ es compatible con $\mathcal{O}$. □

Demostración del lema 142. Supongamos que Φ es al menos $\mathcal{C}^1$. Sea $W' \subseteq W$ un abierto cualquiera. Dado $u \in W'$ y el punto $p = \Phi(u)$, por la proposición 105 del apartado 4.3 existe un abierto $U^p \subseteq \mathbb{R}^n$ conteniendo a p y tal que $X \cap U^p$ es un grafo en el que unas variables

$(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-k}})$ son puestas como funciones $\mathcal{C}^s$ de las otras variables $(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$ que a su vez recorren un abierto $W_0\subseteq\mathbb{R}^k$. La correspondiente parametrización grafo $\Psi: W_0\to\mathbb{R}^n$ es regular y biyectiva de W_0 a $X\cap U^p$. Además la inversa Ψ^{-1} es la restricción a $X\cap U^p$ de la proyección $\pi_{i_1\cdots i_k}$. Tomamos un entorno $u\in W^u\subseteq W$ tal que $\Phi(W^u)\subseteq U^p$. Entonces en realidad $\Phi(W^u)$ está contenido en el grafo y la proyección

$$\sigma \;=\; \pi_{i_1\cdots i_k}\circ\Phi : W^u \longrightarrow W_0\;,$$

además de ser al menos $\mathcal{C}^1$, cumple la identidad

$$\Phi|_{W^u} \;\equiv\; \Psi\circ\sigma\;. \tag{92}$$

Aplicando la regla de la cadena a (92), vemos que la inyectividad de las diferenciales de Φ fuerza que las de σ sean también inyectivas, luego biyectivas, y σ es aplicación regular entre dos abiertos de $\mathbb{R}^k$. Entonces σ es localmente inyectiva, por el teorema de la función inversa, y es abierta por la proposición 89 del apartado 3.6. La inyectividad local de σ la hereda $\Psi\circ\sigma$, es decir $\Phi|_{W^p}$, por ser Ψ biyectiva. Esto demuestra la inyectividad local de Φ.
Volviendo con el abierto W', ahora sabemos que $\sigma(W'\cap W^u)$ es un abierto de $\mathbb{R}^k$ y la fórmula:

$$\Phi(W'\cap W^u) \;=\; (X\cap U^p)\cap\pi^{-1}_{i_1\cdots i_k}\big(\sigma(W'\cap W^u)\big)\;,$$

produce un abierto relativo de X. Suponiendo hecha esta construcción para todo $u\in W'$, la igualdad:

$$\Phi(W') \;=\; \bigcup_{u\in W'}\Phi\big(W'\cap W^u\big)\;,$$

exhibe la imagen $\Phi(W')$ como un abierto relativo de X. □

Demostración de la proposición 144. Por razones puramente conjuntistas, las biyecciones (60) están bien definidas y son inversas mutuas. Si demostramos que son de clase $\mathcal{C}^s$, quedará probado que son difeomorfismos. Por la simetría del problema, basta con ver que $\Phi_j^{-1}\circ\Phi_i$ es de clase $\mathcal{C}^s$.
Dado $u\in W_{ij}$ veamos que $\Phi_j^{-1}\circ\Phi_i$ es de clase $\mathcal{C}^s$ en un entorno de u. Como u es arbitrario, esto probará que $\Phi_j^{-1}\circ\Phi_i$ es de clase $\mathcal{C}^s$ en todo su dominio.
Sea $v=\Phi_j^{-1}(u)$, es decir que tenemos $\Phi_j(v)=\Phi_i(u)=p\in X$. Hay un abierto $U^p\subseteq\mathbb{R}^n$, conteniendo a p, tal que $X\cap U^p$ es un grafo. Sea $\Psi: W_0\to X\cap U^p$ la correspondiente parametrización grafo y $\pi_{i_1\cdots i_k}$ la proyección que la invierte. Tomamos un entorno $W^v\subseteq W_{ji}$ de v tal que $Y_j=\Phi_j(W^v)$ es un abierto relativo de X contenido en U^p y conteniendo a p.
Hemos visto en la demostración del lema 142 que la proyección $\sigma=\pi_{i_1\cdots i_k}\circ\Phi_j : W^v\to W_0$ cumple la identidad $\Phi_j|_{W^v}\equiv\Psi\circ\sigma$. También hemos visto que σ es regular. Además es inyectiva, porque Φ_j lo es, luego σ es un difeomorfismo de W^v a un abierto $W_0'\subseteq W_0$.
Como Φ_j es biyectiva de W^v a Y_j, resulta que Ψ es biyectiva de W_0' a Y_j, luego

$$W_0' \;=\; \Psi^{-1}(Y_j) \;=\; \pi_{i_1\cdots i_k}(Y_j)\;.$$

El inverso $\Phi_j^{-1}: Y_j\to W^v$ es la composición $\sigma^{-1}\circ\big(\Psi^{-1}|_{Y_j}\big)=\sigma^{-1}\circ\big(\pi_{i_1\cdots i_k}|_{Y_j}\big)$. Tomamos ahora el abierto $W_1=\Phi_i^{-1}(Y_j)$, que contiene a u, y tenemos la fórmula:

$$\big(\Phi_j^{-1}\circ\Phi_i\big)\Big|_{W_1} \;=\; \sigma^{-1}\circ\pi_{i_1\cdots i_k}\circ\big(\Phi_i\big|_{W_1}\big)\;,$$

compuesta de tres funciones de clase $\mathcal{C}^s$ ente abiertos de $\mathbb{R}^k$ o $\mathbb{R}^n$, luego $\Phi_j^{-1}\circ\Phi_i$ es de clase $\mathcal{C}^s$ en el entorno W_1 de u . Esto prueba la proposición. □

Demostración del teorema 147.
La continuidad es una **propiedad local:** si se cumple en abiertos (relativos) pequeños entonces se cumple en toda la variedad. La proposición 105 del apartado 4.3 nos dice que abiertos relativos pequeños de X son grafos $\{x_j=\varphi(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\}$ con φ función de

clase al menos $\mathcal{C}^1$ en un abierto $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. Basta, pues, con demostrar el teorema cuando X es un grafo de éstos. Además podemos suponer que W es conexo por caminos, porque si no lo es estudiamos por separado los grafos de las restricciones de φ a cada componente conexa por caminos de W.
Haremos la demostración cuando $j = 1$. Al final será obvio qué hacer para otros valores de j. Tenemos, pues, un abierto conexo por caminos $W \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, una función $\varphi : W \to \mathbb{R}$ y el grafo

$$X \;=\; \big\{\, \big(\,\varphi(x_2,\ldots,x_n)\,,\, x_2\,,\,\ldots\,,\, x_n\,\big) \;:\; (x_2,\ldots,x_n) \in W \,\big\}\;.$$

Consideramos también la parametrización grafo:

$$\Phi : W \longrightarrow X \quad , \quad \Phi(x_2,\ldots,x_n) \;=\; \big(\,\varphi(x_2,\ldots,x_n)\,,\, x_2\,,\,\ldots\,,\, x_n\,\big)\;.$$

Al ser W conexo por caminos, su imagen continua $X = \Phi(W)$ también lo es. Entonces de las proposiciones 141 y 143 deducimos que X tiene exactamente dos orientaciones: la inducida por Φ y la inducida por $\Psi : W' \to X$, donde $W' = \{(x_2, x_3, \ldots, x_n) \,:\, (-x_2, x_3, \ldots, x_n) \in W\}$ y $\Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n) \equiv \Phi(-x_2, x_3, \ldots, x_n)$.
Encontramos el campo normal $\mathbf{a} : X \to \mathbb{R}^n$, continuo y unitario, dado por la siguiente fórmula en la que hemos escrito $\overline{x}$ para denotar $(x_2, \ldots, x_n)$:

$$p \;=\; \Phi(\overline{x}) \;\Longrightarrow\; \mathbf{a}(p) \;=\; \frac{\big(\,1\;,\; -\varphi_{x_2}(\overline{x})\;,\;\ldots\;,\; -\varphi_{x_n}(\overline{x})\,\big)}{\sqrt{1 + \varphi_{x_2}(\overline{x})^2 + \cdots + \varphi_{x_n}(\overline{x})^2}}\;.$$

Si $\mathbf{b} : X \to \mathbb{R}^n$ es cualquier campo normal, continuo y unitario, se prueba fácilmente que el conjunto $Y = \{p \in X \,:\, \mathbf{a}(p) = \mathbf{b}(p)\}$ es abierto y cerrado relativo de X. Como X es conexa por caminos, se deduce que o bien $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$ o bien $\mathbf{b} \equiv -\mathbf{a}$, luego X tiene exactamente dos campos normales continuos y unitarios: $\mathbf{a}$ y $-\mathbf{a}$.
En el siguiente cálculo hemos sumado a la primera columna cada una de las otras columnas multiplicada por su primera entrada:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} & \cdots & \varphi_{x_n} \\ -\varphi_{x_2} & 1 & 0 & & 0 \\ -\varphi_{x_3} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\varphi_{x_n} & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \;=\; \det \begin{bmatrix} 1 + \|\nabla\varphi\|_2^2 & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} & \cdots & \varphi_{x_n} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}\;,$$

y llegamos a:

$$\det\big[\,\mathbf{a}\,|\,\Phi_{x_2}\,|\,\cdots\,|\,\Phi_{x_n}\,\big] \;=\; \frac{\big(\,1 + \|\nabla\varphi\|_2^2\,\big)\cdot 1 \cdots 1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi\|_2^2}} \;=\; \sqrt{1 + \|\nabla\varphi\|_2^2} \;>\; 0\;. \tag{93}$$

Dado un campo normal y continuo $\mathbf{b}_0 : X \to \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, el campo $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0/\|\mathbf{b}_0\|_2$ es normal, continuo y unitario. Si $\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}$, entonces (93) nos dice que la orientación en cada espacio T_pX correspondiente a $\mathbf{b}_0(p)$ por (62) es la inducida por Φ, luego varía continuamente con p y es una orientación de X. Si $\mathbf{b} \equiv -\mathbf{a}$, entonces deducimos de (93) que la orientación en cada espacio T_pX correspondiente a $\mathbf{b}_0(p)$ por (62) es la inducida por Ψ, luego también varía continuamente con p y también es una orientación de X.

Recíprocamente, una orientación $\mathcal{O}$ de X tiene que coincidir o con la inducida por Φ o con la inducida por Ψ. En el primer caso le corresponde por (62) el campo normal unitario $\mathbf{a}$, que es continuo. En el segundo caso le corrsponde por (62) el campo normal unitario $-\mathbf{a}$, que también es continuo.
Esto completa la demostración para un grafo conexo por caminos y, por lo explicado al principio, para cualquier hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Demostración del teorema 155. Primero demostramos que esas funciones generan $\mathcal{A}^k(E)$. Lo haremos para $k=2$ dejando como ejercicio el caso de k general.
Tenemos, pues, una forma bilineal alternada $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$. Escribimos el par general (v,w) de vectores de E como $v=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$ y $w=b_1v_1+\cdots+b_nv_n$. Desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\varphi(v,w) &= \varphi\left(\sum_{1\le i\le n} a_iv_i\,,\ \sum_{1\le j\le n} b_jv_j\right) = \sum_{1\le i,j\le n} a_ib_j\,\varphi(v_i,v_j) = \\
&= \sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\ne j}} a_ib_j\,\varphi(v_i,v_j) = \sum_{1\le i<j\le n}\Big(a_ib_j\,\varphi(v_i,v_j)+a_jb_i\,\varphi(v_j,v_i)\Big) = \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\varphi(v_i,v_j)\,(a_ib_j-b_ia_j) = \sum_{1\le i<j\le n}\varphi(v_i,v_j)\Big(\ell_i(v)\,\ell_j(w)-\ell_i(w)\,\ell_j(v)\Big) = \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\varphi(v_i,v_j)\,\Delta(\ell_i,\ell_j)\,(v,w)\ .
\end{aligned}$$

Al ser esta igualdad cierta para cualesquiera $v,w\in E$, tenemos $\varphi\equiv\sum_{1\le i<j\le n}c_{ij}\,\Delta(\ell_i,\ell_j)$ con los coeficientes dados por $c_{ij}=\varphi(v_i,v_j)$. Análogamente se hace para otros k.
Con esto sabemos que $\mathcal{B}_k$ genera $\mathcal{A}^k(E)$. Para ver que $\mathcal{B}_k$ es una base probaremos ahora que, dada φ alternada de grado k, los coeficientes en el desarrollo

$$\varphi = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} c_{i_1\cdots i_k}\,\Delta(\ell_{i_1},\ldots,\ell_{i_k})\ , \tag{94}$$

sólo pueden ser $c_{i_1\cdots i_k}=\varphi(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})$.
Para $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$ y $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$, vemos que:

$$\Delta(\ell_{j_1},\ldots,\ell_{j_k})\,(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}) = \begin{cases} 0 & \text{si}\quad (j_1,\ldots,j_k)\ne(i_1,\ldots,i_k)\\ 1 & \text{si}\quad (j_1,\ldots,j_k)=(i_1,\ldots,i_k)\end{cases}$$

lo cual nos permite deducir que si se cumple (94) entonces:

$$\varphi(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}) = c_{i_1\ldots i_k}\cdot 1+\sum_{(j_1,\ldots,j_k)\ne(i_1\ldots,i_k)} c_{j_1\ldots j_k}\cdot 0 = c_{i_1\ldots i_k}\ .$$

□

Demostración del teorema 156. Consideramos el grupo simétrico S_{k+h} y los subgrupos H_1,H_2, donde H_1 consta de las permutaciones que fijan $k+1,\ldots,k+h$ y H_2 consta de las permutaciones que fijan $1,\ldots,k$. Los elementos de H_1 conmutan con los de H_2 y H_1H_2 es un subgrupo y es un producto directo.
Fijamos cualquier conjunto $R\subset S_{k+h}$ de representantes para el conjunto cociente S_{k+h}/H_1H_2. Hecho eso, toda permutación $\sigma\in S_{k+h}$ se factoriza de manera única como $\sigma=\rho\tau_1\tau_2$ con $\rho\in R$, $\tau_1\in H_1$ y $\tau_2\in H_2$.
Dadas formas lineales $\ell_1,\ldots,\ell_k,m_1,\ldots,m_h : E\to\mathbb{R}$ y vectores $v_1,\ldots,v_{k+h}\in E$, Tenemos:

$$\begin{aligned}
&\Delta(\ell_1,\ldots,\ell_k,m_1,\ldots,m_h)\,(v_1,\ldots,v_{k+h}) = \\
&= \sum_{\sigma\in S_{k+h}}\operatorname{sig}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{k}\ell_i\big(v_{\sigma(i)}\big)\cdot\prod_{j=1}^{h}m_j\big(v_{\sigma(k+j)}\big) = \\
&= \sum_{\rho,\tau_1,\tau_2}\operatorname{sig}(\rho)\operatorname{sig}(\tau_1)\operatorname{sig}(\tau_2)\cdot\prod_{i=1}^{k}\ell_i\big(v_{\rho(\tau_1(i))}\big)\cdot\prod_{j=1}^{h}m_j\big(v_{\rho(\tau_2(k+j))}\big) = \\
&= \sum_{\rho\in R}\operatorname{sig}(\rho)\cdot\Delta(\ell_i,\ldots,\ell_k)\,\big(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(k)}\big)\cdot\Delta(m_1,\ldots,m_h)\,\big(v_{\rho(k+1)},\ldots,v_{\rho(k+h)}\big)\ .
\end{aligned}$$

Esto sugiere definir, para cualesquiera $\varphi \in \mathcal{A}^k(E)$ y $\psi \in \mathcal{A}^h(E)$, la función:

$$(\varphi \wedge \psi)(v_1, \ldots, v_{k+h}) \;=\; \sum_{\rho \in R} \operatorname{sig}(\rho) \cdot \varphi\big(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(k)}\big) \cdot \psi\big(v_{\rho(k+1)}, \ldots, v_{\rho(k+h)}\big) \,.$$

Esto es una buena definición de una función $E^{k+h} \to \mathbb{R}$. Además depende bilinealmente de la pareja (φ, ψ). Sabemos, además, que la operación $\wedge$ que resulta satisface la condición (78). Sólo falta comprobar que $\varphi \wedge \psi$ es alternada, pero esto es cierto cuando los factores son del tipo $\Delta(\cdots)$ y, como $\wedge$ es bilineal y en general φ y ψ son sumas finitas de elementos de ese tipo, la función $\varphi \wedge \psi$ es una suma finita de formas alternadas y por lo tanto una forma alternada. $\square$

6.12 Ejemplos de cálculo de una primitiva exterior

Dada una k-forma ω, llamamos **primitiva exterior** o **antiderivada exterior** de ω a una $(k-1)$-forma η tal que:

$$d\eta = \omega \,.$$

Llamamos **exactas en el abierto** U a las formas diferenciales que admiten una antiderivada exterior en U. Para que ω sea exacta en U es necesario que sea **cerrada en** U, es decir que cumpla la identidad:

$$d\omega \;\equiv\; 0 \quad \text{en todo } U \,.$$

En el apartado 6.9 hemos descrito un método para calcular, en dominios convexos, una primitiva exterior de una forma diferencial cerrada. Aquí damos varios ejemplos de ese método de cálculo. En cada uno de ellos, comprueba tú que la forma ω que se da cumple $d\omega \equiv 0$.

Ejemplo1. Una 2-forma en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega \;\equiv\; (e^{yz} - x)\, dx \wedge dy + e^z\, dx \wedge dz + (2yz - xy\, e^{yz} + 1)\, dy \wedge dz \,.$$

Comprueba que $d\omega \equiv 0$.

Primer paso. Separamos los términos que contienen dx:

$$(e^{yz} - x)\, dx \wedge dy \qquad \text{y} \qquad e^z\, dx \wedge dz \,,$$

en cada uno quitamos el factor dx (asegurándonos primero de que esté a la izquierda) y reemplazamos la función coeficiente por una integral indefinida suya respecto de x:

$$\eta_1 \;=\; \left(x\, e^{yz} - \frac{x^2}{2}\right) dy + x\, e^z\, dz \,.$$

Calculamos la derivada exterior de η_1:

$$d\eta_1 \;=\; (e^{yz} - x)\, dx \wedge dy + e^z\, dx \wedge dz - xy\, e^{yz}\, dy \wedge dz \,,$$

y la diferencia $\omega_1 = \omega - d\eta_1$ ya no contiene x en nigún sitio:

$$\omega_1 \;=\; \omega - d\eta_1 \;=\; (2yz + 1)\, dy \wedge dz \,.$$

Sabemos por la teoría que esto se debe a que ω es cerrada: si hacemos lo mismo con una 2-forma no cerrada, la diferencia también tendrá nulos los coeficientes de $dx \wedge dy$ y de $dx \wedge dz$, pero el coeficiente de $dy \wedge dz$ en dicha diferencia contendrá la variable x.
Segundo paso. Al ser ω_1 un monomio con sólo las variables y, z, es fácil ponerlo como una derivada exterior:

$$(2yz + 1)\, dy \wedge dz \;=\; d\big(\,(y^2 z + y)\, dz\,\big) \,,$$

y finalmente:

$$\omega \;=\; d\eta \qquad \text{con} \quad \eta \;=\; \eta_1 + (y^2 z + y)\, dz \;=\; \left(x\, e^{yz} - \frac{x^2}{2} \right) dy + (x\, e^z + y^2 z + y)\, dz \;.$$

Ejemplo 2. Una 3-forma en $\mathbb{R}^4$:

$$\omega \;\equiv\; (x_2 + 5x_3x_4)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(1 + x_3^2 \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (3x_1x_3 - e^{x_3})\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;.$$

Comprueba que $d\omega \equiv 0$.
Primer paso. Separamos los términos que contienen dx_1 y nos aseguramos de que el factor dx_1 esté a la izquierda:

$$(x_2 + 5x_3x_4)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \qquad \text{y} \qquad \left(1 + x_3^2 \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \;.$$

En cada término quitamos el factor dx_1 e integramos la función coeficiente respecto de x_1:

$$\eta_1 \;=\; (x_1x_2 + 5x_1x_3x_4)\, dx_2 \wedge dx_3 \;+\; \left(x_1 + x_1x_3^2 \right) dx_2 \wedge dx_4 \;.$$

Hallamos $d\eta_1$ y la diferencia:

$$\begin{aligned}
d\eta_1 \;&=\; (x_2 + 5x_3x_4)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(1 + x_3^2 \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \\
&\quad\; + 5x_1x_3\, dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + 2x_1x_3\, dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \;= \\
&=\; (x_2 + 5x_3x_4)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(1 + x_3^2 \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 3x_1x_3\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;, \\
\omega - d\eta_1 \;&=\; -e^{x_3}\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;.
\end{aligned}$$

Segundo paso. Como $\omega - d\eta_1$ es un monomio conteniendo solamente las variables x_2, x_3, x_4, es fácil ponerlo como una derivada exterior:

$$-e^{x_3}\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \;=\; d\left(e^{x_3}\, dx_2 \wedge dx_4 \right) \;,$$

luego $\omega = d\left(\eta_1 + e^{x_3}\, dx_2 \wedge dx_4 \right)$, es decir:

$$\omega = d\eta \qquad \text{con} \quad \eta = (x_1x_2 + 5x_1x_3x_4)\, dx_2 \wedge dx_3 + \left(x_1 + x_1x_3^2 + e^{x_3} \right) dx_2 \wedge dx_4 \;.$$

Ejemplo 3. Una 2-forma en $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\omega \;&=\; \left(e^{2x_1} \operatorname{sen} x_2 - 2x_1x_2\, e^{2x_1} \cos x_2 \right) dx_1 \wedge dx_2 - 4x_2x_3\, e^{2x_1}\, dx_1 \wedge dx_3 + \operatorname{sen} x_2\, dx_1 \wedge dx_4 - \\
&\quad - \left(e^{x_4} + 2x_3\, e^{2x_1} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(x_1 \cos x_2 - x_3\, e^{x_4} \right) dx_2 \wedge dx_4 + 2x_3\, dx_3 \wedge dx_4 \;.
\end{aligned}$$

Como era de esperar, es una suma de $\binom{4}{2} = 6$ monomios. Puedes comprobar que es cerrada.
Primer paso. Separamos los (tres) términos de ω con el factor dx_1. En cada término nos aseguramos de que dx_1 esté a la izquierda, quitamos este factor e integramos la función coeficiente respecto de x_1:

$$\eta_1 \;=\; \left(\frac{e^{2x_1}}{2} \operatorname{sen} x_2 - \left(x_1\, e^{2x_1} - (1/2)\, e^{2x_1} \right) x_2 \cos x_2 \right) dx_2 - 2x_2x_3\, e^{2x_1}\, dx_3 + x_1 \operatorname{sen} x_2\, dx_4 \;.$$

Hemos utilizado $\displaystyle\int 2u\, e^{2u}\, du = u\, e^{2u} - (1/2)\, e^{2u}$, que se obtiene integrando por partes.
Hallamos la derivada exterior:

$$\begin{aligned}
d\eta_1 \;&=\; \left(e^{2x_1} \operatorname{sen} x_2 - 2x_1x_2\, e^{2x_1} \cos x_2 \right) dx_1 \wedge dx_2 - 4x_2x_3\, e^{2x_1}\, dx_1 \wedge dx_3 + \operatorname{sen} x_2\, dx_1 \wedge dx_4 - \\
&\quad -2x_3\, e^{2x_1}\, dx_2 \wedge dx_3 + x_1 \cos x_2\, dx_2 \wedge dx_4 \;,
\end{aligned}$$

y hallamos la diferencia:

$$\omega_1 \;=\; \omega - d\eta_1 \;=\; -e^{x_4}\, dx_2 \wedge dx_3 - x_3\, e^{x_4}\, dx_2 \wedge dx_4 + 2x_3\, dx_3 \wedge dx_4 \;,$$

que, tal como predice la teoría, ya no contiene la variable x_1 en ningún sitio debido a que ω es cerrada. Además ω_1 es cerrada, por ser diferencia de una cerrada menos una exacta.

Segundo paso. Separamos los (dos) términos de ω_1 que contienen el factor dx_2. En cada término nos aseguramos de que dx_2 esté a la izquierda, quitamos este factor e integramos la función coeficiente respecto de x_2 *eligiendo funciones primitivas que no dependan de* x_1:

$$\eta_2 \;=\; -x_2\, e^{x_4}\, dx_3 - x_2 x_3\, e^{x_4}\, dx_4 \;.$$

Hallamos la derivada exterior y la diferencia:

$$\begin{aligned} d\eta_2 \;&=\; -e^{x_4}\, dx_2 \wedge dx_3 - x_3\, e^{x_4}\, dx_2 \wedge dx_4 + \big(\, \underbrace{x_2\, e^{x_4} - x_2\, e^{x_4}}_{\equiv 0} \,\big)\, dx_3 \wedge dx_4 \;, \\ \omega_2 \;&=\; \omega_1 - d\eta_2 \;=\; 2x_3\, dx_3 \wedge dx_4 \;, \end{aligned}$$

Tal como predice la teoría, ω_2 ya no contiene x_1 ni x_2 en ningún sitio. Para que esto haya sido posible, ha sido crucial que ω_1 sea cerrada y que hayamos construido η_2 con funciones primitivas que no dependen de x_1.

Tercer paso. Como ω_2 es un monomio sin las variables x_1, x_2, es fácil ponerla como una derivada exterior:

$$2x_3\, dx_3 \wedge dx_4 \;=\; d\left(x_3^2\, dx_4 \right) \;.$$

Finalmente $\omega = d\left(\eta_1 + \eta_2 + x_3^2\, dx_4 \right)$, es decir $\omega = d\eta$ con:

$$\begin{aligned} \eta \;\;=\;\; & \left(\frac{e^{2x_1}}{2} \operatorname{sen} x_2 - \left(x_1\, e^{2x_1} - (1/2)\, e^{2x_1} \right) x_2 \cos x_2 \right) dx_2 - \left(\, 2x_2 x_3\, e^{2x_1} + x_2\, e^{x_4} \,\right)\, dx_3 + \\ & + \left(x_1 \operatorname{sen} x_2 - x_2 x_3\, e^{x_4} + x_3^2 \right) dx_4 \;. \end{aligned}$$

6.13 Ejemplos de orientación, pullback e integración

Ejemplo 1. Sea $X = \{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 + x^2 = 1\}$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$. Elige una normal unitaria continua ν para X. Considera la orientación $\mathcal{O}$ de X correspondiente a la ν elegida y calcula $\int_{(X,\mathcal{O})} \omega$, siendo ω la siguiente 2-forma:

$$\omega \;=\; x\, dx \wedge dy + y\, dx \wedge dz \;.$$

El campo $\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (2x, 2y, 2z)$ es normal a la esfera, en la cual tiene longitud constante 2. Elijamos, por ejemplo, $\nu = (1/2)\, \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = (x, y, z)$.
La siguiente parametrización:

$$\Phi(u,v) \;=\; \big(\, \cos u \cos v \;,\; \cos u \operatorname{sen} v \;,\; \operatorname{sen} u \,\big) \quad , \quad (u,v) \in D \;=\; \left(-\frac{\pi}{2} \,,\, \frac{\pi}{2} \right) \times (0, 2\pi) \;,$$

es regular e inyectiva. Aunque no lo hemos dicho en la parte teórica, integrar en toda la esfera da el mismo resultado que integrar en el abierto relativo $\Phi(D)$ porque el complemento $X \setminus \Phi(D)$ es un arco de la curva $X \cap \{y = 0\}$. Pero veamos si Φ es compatible o no con la orientación $\mathcal{O}$ asociada a ν.
Como D es conexo por caminos, la proposición 141 nos dice que Φ es compatible con $\mathcal{O}$ si y sólo si lo es en un punto particular. Probemos con el punto $p = \Phi(0, \pi/2) = (0, 1, 0)$, en el cual tenemos $\nu(p) = (0, 1, 0)$. También en este punto:

$$\begin{aligned} \Phi_u \;&=\; \big(\, -\operatorname{sen} u \cos v \;,\; -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \;,\; \cos u \,\big) \;=\; (0, 0, 1) \;, \\ \Phi_v \;&=\; \big(\, -\cos u \operatorname{sen} v \;,\; \cos u \cos v \;,\; 0 \,\big) \;=\; (-1, 0, 0) \;, \end{aligned}$$

Y ahora aplicamos el criterio de la fórmula (62). El determinante:

$$\det \left[\, \nu \mid \Phi_u \mid \Phi_v \,\right]_{(u,v)=(0,\pi/2)} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \;=\; -1\;,$$

es negativo, luego Φ no es compatible con la orientación que hemos elegido. La aplicación $\sigma(u,v) = (-u,v)$ es un difeomorfismo, aplica biyectivamente D sobre sí mismo e invierte la orientación; por lo tanto la siguiente parametrización:

$$\Psi : D \to X \quad , \quad \Psi(u,v) \;=\; \Phi(-u,v) \;=\; \big(\, \cos u \cos v \;,\; \cos u \operatorname{sen} v \;,\; -\operatorname{sen} u \,\big)\;,$$

es compatible con la orientación $\mathcal{O}$ correspondiente a ν.
Como además el complemento $X \setminus \Psi(D) = X \setminus \Phi(D)$ es un arco de curva, tenemos:

$$\int_{(X,\mathcal{O})} \omega \;=\; \int_{(\Psi(D),\mathcal{O})} \omega \;=\; \int_\Psi \omega \;=\; \int_D \Psi^*\omega\;.$$

Comenzamos el cálculo del pullback:

$$\begin{aligned}
\Psi^*\omega \;&=\; \cos u \cos v \; d(\cos u \cos v) \wedge d(\cos u \operatorname{sen} v) \,+ \\
&\quad + \cos u \operatorname{sen} v \; d(\cos u \cos v) \wedge d(-\operatorname{sen} u) \;= \\
&=\; \cos u \cos v \,\big[\, -\operatorname{sen} u \cos v \, du - \cos u \operatorname{sen} v \, dv \,\big] \wedge \big[\, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \, du + \cos u \cos v \, dv \,\big] \,+ \\
&\quad + \cos u \operatorname{sen} v \,\big[\, -\operatorname{sen} u \cos v \, du - \cos u \operatorname{sen} v \, dv \,\big] \wedge (-\cos u \, du) \;= \\
&=\; \cos u \cos v \,\big[\, (-\operatorname{sen} u) \cos u \cos^2 v \, du \wedge dv + (-\cos u)\,(-\operatorname{sen} u) \operatorname{sen}^2 v \, dv \wedge du \,\big] \,+ \\
&\quad + \cos u \,(-\cos u)\,(-\cos u) \operatorname{sen}^2 v \, dv \wedge du\;.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $dv \wedge du = -du \wedge dv$, llegamos a:

$$\Psi^*\omega \;=\; \Big(\, -\cos^2 u \operatorname{sen} u \cos^3 v \;-\; \cos^2 u \operatorname{sen} u \cos v \operatorname{sen}^2 v \;-\; \cos^3 u \operatorname{sen}^2 v \,\Big)\, du \wedge dv\;.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\int_{(X,\mathcal{O})} \omega \;&=\; \int_D \Big(-\cos^2 u \operatorname{sen} u \cos^3 v \;-\; \cos^2 u \operatorname{sen} u \cos v \operatorname{sen}^2 v \;-\; \cos^3 u \operatorname{sen}^2 v \Big)\, du dv \;= \\
&=\; \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos^2 u \operatorname{sen} u \, du \cdot \int_0^{2\pi} \cos^3 v \, dv \;- \\
&\quad - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u \operatorname{sen} u \, du \cdot \int_0^{2\pi} \cos v \operatorname{sen}^2 v \, dv \;- \\
&\quad - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 u \, du \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 v \, dv \;= \\
&=\; 0 \,-\, 0 \,-\, \left[\operatorname{sen} u - \frac{\operatorname{sen}^3 u}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \pi \;=\; -\frac{4}{3}\,\pi\;.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Sea $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ función de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto de $\mathbb{R}^3_{x_1x_2x_3}$ que contiene la región compacta $D = [0,1]^3$. Consideramos el grafo en $\mathbb{R}^4$:

$$X \;=\; \big\{\, x_4 = \varphi(x_1,x_2,x_3) \,\big\}\;,$$

y la parametrización $\Phi(x_1,x_2,x_3) \;=\; \big(\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, x_3 \,,\, \varphi(x_1,x_2,x_3) \,\big)$. Elige una orientación $\mathcal{O}$ en X y después integra las siguientes 3-formas en la parcela orientada $\big(\, \Phi(D) \,,\, \mathcal{O} \,\big)$:

$$\omega \;=\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad , \quad \eta \;=\; dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4\;.$$

Las normales unitarias del grafo X son $\pm(1/\ell)\cdot\mathbf{a}$, siendo:

$$\mathbf{a} \;=\; \big(\,-\varphi_{x_1}\,,\,-\varphi_{x_2}\,,\,-\varphi_{x_3}\,,\,1\big) \quad \text{y} \quad \ell \;=\; \sqrt{\varphi_{x_1}^2+\varphi_{x_2}^2+\varphi_{x_3}^2+1}\;.$$

Elegimos como normal ν la que tiene cuarta coordenada positiva, es decir $\nu=(1/\ell)\cdot\mathbf{a}$, y consideramos la correspondiente orientación $\mathcal{O}$ en X.
El determinante:

$$\det\big[\,\mathbf{a}\,|\,\Phi_{x_1}\,|\,\Phi_{x_2}\,|\,\Phi_{x_3}\,\big] \;=\; \begin{vmatrix} -\varphi_{x_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\varphi_{x_2} & 0 & 1 & 0 \\ -\varphi_{x_3} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \varphi_{x_1} & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ell^2 & \varphi_{x_1} & \varphi_{x_2} & \varphi_{x_3} \end{vmatrix} \;=\; -\ell^2\;,$$

es negativo, luego Φ no es compatible con $\mathcal{O}$. El difeomorfismo $\sigma(x_1,x_2,x_3)=(-x_1,x_2,x_3)$ invierte la orientación y es biyectivo de $\widetilde{D}=[-1,0]\times[0,1]^2$ a D. Tomamos el compuesto $\Psi=\Phi\circ\sigma$, es decir:

$$\Psi(x_1,x_2,x_3) \;=\; \big(\,-x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,\psi(x_1,x_2,x_3)\,\big) \quad,\quad (x_1,x_2,x_3)\in[-1,0]\times[0,1]^2\;,$$

siendo $\psi(x_1,x_2,x_3)=\varphi(-x_1,x_2,x_3)$. Ahora Ψ es compatible con la orientación $\mathcal{O}$ y la imagen $\Psi(\widetilde{D})$ es la misma parcela de antes. Calculamos el pullback de ω:

$$\Psi^*\omega \;=\; \big(-\,dx_1\big)\wedge dx_2\wedge dx_3\;,$$

y sabemos que:

$$\int_{\left(\Psi(\widetilde{D})\,,\,\mathcal{O}\right)}\omega \;=\; \int_{\widetilde{D}}-dx_1dx_2dx_3 \;=\; (-1)\cdot\,\mathrm{Vol}\,(\widetilde{D}) \;=\; -1\;.$$

Calculamos el pullback de η:

$$\Psi^*\eta \;=\; \big(-\,dx_1\big)\wedge dx_2\wedge d\psi \;=\; -\psi_{x_3}\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\;,$$

y entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{\left(\Psi(\widetilde{D})\,,\,\mathcal{O}\right)}\eta \;&=\; \int_{[-1,0]\times[0,1]^2}-\psi_{x_3}\,dx_1dx_2dx_3 \;=\\
&=\; \int_{[-1,0]\times[0,1]}\left(\int_{[0,1]}-\psi_{x_3}\,dx_3\right)dx_1dx_2 \;=\\
&=\; \int_{[-1,0]\times[0,1]}\big(\,\psi(x_1,x_2,0)-\psi(x_1,x_2,1)\,\big)\,dx_1dx_2 \;=\\
&=\; \int_{[-1,0]\times[0,1]}\varphi(-x_1,x_2,0)\,dx_1dx_2-\int_{[-1,0]\times[0,1]}\varphi(-x_1,x_2,1)\,dx_1dx_2 \;=\\
&=\; \int_{[0,1]^2}\varphi(x_1,x_2,0)\,dx_1dx_2-\int_{[0,1]^2}\varphi(x_1,x_2,1)\,dx_1dx_2\;.
\end{aligned}$$