Instrucciones:
Resuelve, razonadamente, lo que se indica para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI.
Deberás entregar lo hecho al finalizar la hora de clase, indicando tu nombre y DNI.

Modelo 1. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ los endomorfismos dados por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y $g(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$, con $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -5 \\ -5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcula los autovalores de estos endomorfismos. Halla una base $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle \mathbf{v}_0 \rangle$ sea una recta real invariante por f y $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ sea un plano real invariante por f. Además, que el endomorfismo inducido $\mathbb{W} \to \mathbb{W}$ se describa respecto de la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ como un múltiplo positivo de una rotación. Da una fórmula para A^n en función de n. **(Solución en la página 3).**

Modelo 2. Halla una base de $\mathcal{P}_3$ formada por autofunciones del endomorfismo $L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ que se da. Elige un orden en dicha base, y explica razonadamente qué colocación de los autovalores en la matriz diagonal corresponde a dicho orden.

Jueves impar.
1. Resuelve el ejercicio del modelo **1** con la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Resuelve el ejercicio del modelo **2** para el endomorfismo:

$$L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 \quad , \quad L\big(p(x)\big) = 5\,p'(0) + 6\,p(x) + 4\,p(-x) + p'''(x) \ .$$

3. Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes. Demuestra que también son linealmente independientes si se los considera como vectores de $\mathbb{C}^n$ y se permiten coeficientes complejos en las combinaciones lineales. Da un ejemplo de dos vectores (no reales) de $\mathbb{C}^2$ que sean linealmente independientes para combinaciones lineales con coeficientes reales pero NO para combinaciones lineales con coeficientes complejos.

Jueves par.
1. Resuelve el ejercicio del modelo **1** con la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Resuelve el ejercicio del modelo **2** para el endomorfismo:

$$L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 \quad , \quad L\big(p(x)\big) = 3\,x\,p''(0) + 6\,p(x) + 2\,p(-x) + 2\,p'''(x) \ .$$

3. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial complejo. Consideramos la misma suma de vectores, pero definimos una nueva multiplicación (que denotamos $*$) por número complejo de la siguiente manera:

$$\forall c \in \mathbb{C} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \qquad c * \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{c}\,\mathbf{v} \ .$$

Demuestra que esto define una nueva estructura de espacio vectorial complejo, que denotamos $\overline{\mathbb{V}}$. Decimos que una aplicación $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es **semilineal** si conserva la suma de vectores y además cumple:

$$\forall c \in \mathbb{C} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \qquad f\big(c\mathbf{v}\big) \ = \ \overline{c}\,f(\mathbf{v}) \ .$$

Demuestra que las tres propiedades siguientes son equivalentes:

– f es semilineal.

– f es lineal de $\mathbb{V}$ a $\overline{\mathbb{V}}$.

– f es lineal de $\overline{\mathbb{V}}$ a $\mathbb{V}$.

Viernes impar.
1. Resuelve el ejercicio del modelo **1** con la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Resuelve el ejercicio del modelo **2** para el endomorfismo:

$$L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 \quad , \quad L\big(p(x)\big) = -2\,p'(0) + 7\,p(x) + 5\,p(-x) + \frac{1}{3}\,p'''(x) \ .$$

3. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real. En el conjunto $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ consideramos la siguiente suma:

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \,,\, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \,\big) \ ,$$

y la siguiente multiplicación por número complejo:

$$(a + ib) \cdot (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\, a\mathbf{v} - b\mathbf{w} \,,\ a\mathbf{w} + b\mathbf{v} \,\big) \ .$$

Demuestra que esas operaciones convierten a $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ en un espacio vectorial complejo.
Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$, demuestra que la siguiente aplicación:

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \times \mathbb{V} \qquad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \longmapsto \big(\, f(\mathbf{v}) \,,\ f(\mathbf{w}) \,\big)$$

es $\mathbb{C}$–lineal.

Viernes par.
1. Resuelve el ejercicio del modelo **1** con la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Resuelve el ejercicio del modelo **2** para el endomorfismo:

$$L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 \quad , \quad L\big(p(x)\big) = 7\,x\,p''(0) + 5\,p(x) + 2\,p(-x) - p'''(x) \ .$$

3. Decimos que una aplicación $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es **semilineal** si conserva la suma de vectores y además cumple:

$$\forall c \in \mathbb{C} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \qquad f\big(\, c\mathbf{v} \big) \ = \ \overline{c}\, f(\mathbf{v}) \ .$$

Demuestra que la aplicación semilineal general $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ viene dada por la fórmula:

$$f \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ constantes.

Solución al modelo 1. En la matriz $A - \lambda I_3$ sumamos a la primera columna la tercera multiplicada por -1, y resulta:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -5 \\ -3+\lambda & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -5 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1-\lambda & -5 \\ & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,(\lambda^2+4)\,,$$

luego los autovalores de f y de g son: 3 , $\pm 2i$. Encontramos fácilmente que $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ es autovector (tanto de f como de g) con autovalor asociado 3.

Buscamos ahora un autovector (¡sólo de g!) asociado al autovalor con parte imaginaria negativa, es decir $\lambda = -2i$. Si hemos hecho los cálculos bien, la matriz $A - (-2i)I_3$ tiene rango 2 y podemos hallar su espacio nulo utilizando dos filas suyas que sean linealmente independientes. Los cálculos salen más limpios si utilizamos la opuesta de la tercera y la primera y eliminamos el 2 en vez del $4+2i$:

$$\operatorname{Nul}(A + 2i\, I_3) = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2-2i \\ 4+2i & 2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Nul} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2-2i \\ -6+2i & 0 & -3+4i \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ el autovector complejo buscado. La segunda ecuación $(-6+2i)z_1 + (-3+4i)z_3 = 0$ nos dice que hay un autovector de la forma $\begin{bmatrix} 3-4i \\ z_2 \\ -6+2i \end{bmatrix}$, lo que llevado a la primera ecuación $5z_1 + z_2 + (2-2i)z_3 = 0$ nos da:

$$z_2 \;=\; -5(3-4i) - (2-2i)(-6+2i) \;=\; -7+4i\,,$$

y ya tenemos el autovector $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3-4i \\ -7+4i \\ -6+2i \end{bmatrix}$ asociado al autovalor $-2i$ con parte imaginaria negativa. Si $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ son respectivamente las partes real e imaginaria de $\mathbf{z}$, entonces la igualdad compleja $A\,\mathbf{z} = -2i\,\mathbf{z}$ equivale a las dos igualdades reales siguientes:

$$A\,\mathbf{v}_1 = 2\,\mathbf{v}_2 \qquad , \qquad A\,\mathbf{v}_2 = -2\,\mathbf{v}_1\,,$$

que se comprueban fácilmente, lo que nos permite saber que hemos hecho los cálculos bien. Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son linealmente independientes porque son las partes real e imaginaria de un autovector (de g) asociado a un autovalor *no real*. El plano real $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ es invariante por el endomorfismo real f, y el endomorfismo $h : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ inducido por f tiene matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ respecto de la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, es decir que visto en esta base h es como 2 por una rotación en ángulo recto. En particular $\mathbb{W}$ no contiene ninguna recta real invariante por f, luego $\mathbf{v}_0 \notin \mathbb{W}$ y así los tres vectores $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, o sea forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Usando la base $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en salida y en llegada, la matriz de f es:

$$\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & -2 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2\cos\frac{\pi}{2} & -2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ & 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & 2\cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Es decir: $\quad A\,[\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,] \;=\; [\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,] \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2\cos(\pi/2) & -2\operatorname{sen}(\pi/2) \\ & 2\operatorname{sen}(\pi/2) & 2\cos(\pi/2) \end{bmatrix}$, de donde para todo n:

$$A^n\,[\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,] \;=\; [\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,] \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2\cos(\pi/2) & -2\operatorname{sen}(\pi/2) \\ & 2\operatorname{sen}(\pi/2) & 2\cos(\pi/2) \end{bmatrix}^n = [\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,] \begin{bmatrix} 3^n & & \\ & 2^n\cos(n\pi/2) & -2^n\operatorname{sen}(n\pi/2) \\ & 2^n\operatorname{sen}(n\pi/2) & 2^n\cos(n\pi/2) \end{bmatrix},$$

y tenemos, por ejemplo, la fórmula:

$$A^n = [\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,] \begin{bmatrix} 3^n & & \\ & 2^n\cos(n\pi/2) & -2^n\operatorname{sen}(n\pi/2) \\ & 2^n\operatorname{sen}(n\pi/2) & 2^n\cos(n\pi/2) \end{bmatrix} [\,\mathbf{v}_0 \,|\, \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{v}_2\,]^{-1}.$$