Instrucciones:
Resuelve, razonadamente, lo que se indica en la página 2 de esta hoja para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI. Deberás entregar lo hecho al finalizar la hora de clase, indicando tu nombre y DNI.

Ejemplo. Para el siguiente espacio vectorial de funciones $\mathbb{V} = \langle 1\,,\, x\,,\, \log x\,,\, x^2 \rangle$, se considera el endomorfismo $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ determinado por $T\big(f(x)\big) = x\big(f(1) - f'(x)\big) + f(ex)$.
Diagonaliza el endomorfismo T, es decir, halla una base de $\mathbb{V}$ formada por *autofunciones* de T. Calcula, además, el iterado $T^{20}(x^2)$.
Solución. Usando $\{1\,,\, x\,,\, \log x\,,\, x^2\}$ como base de entrada y de salida, calculamos la matriz, A, del endomorfismo:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1+x \\ x &\mapsto ex \\ \log x &\mapsto -1+\log(ex) = \log x \\ x^2 &\mapsto x(1-2x) + e^2x^2 = x + (e^2-2)x^2 \end{aligned} \qquad \text{de donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & e & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2-2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es *triangular por cajas,* de donde de deduce inmediatamente que sus autovalores son: 1 (doble), e, e^2-2.
Pasemos al cálculo de autovectores (autofunciones). Denotemos por x_1, x_2, x_3, x_4 las coordenadas lineales respecto de $\{1\,,\, x\,,\, \log x\,,\, x^2\}$ de cada función en $\mathbb{V}$. Para el autovalor 1, el núcleo de la aplicación $T - \mathrm{id}$ plantea un sistema lineal homogéneo con matriz de coeficientes

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & e-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2-3 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es claramente 2, luego el núcleo es de dimensión $4-2=2$. De la cuarta fila de $A - I_4$ se saca $x_4 = 0$, y así x_3 es libre y $x_1 + (e-1)x_2 = 0$ es la única relación. En particular, una base de $\ker(T - \mathrm{id})$ es $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ con $\mathbf{v}_1 = \log x$ y $\mathbf{v}_2 = (e-1) - x$.
Para el autovalor e queda como matriz de coeficientes

$$A - e\, I_4 = \begin{pmatrix} 1-e & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2-e-2 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 3. Las filas 1ª, 3ª y 4ª nos llevan a $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. La segunda fila es combinación de primera y cuarta. La variable x_2 queda libre, luego $\mathbf{v}_3 = x$ es autofunción generadora para el espacio $\ker(T - e\,\mathrm{id})$.
Por último, el autovalor e^2-2 nos plantea un sistema homogéneo con matriz de coeficientes

$$A - (e^2-2)\, I_4 = \begin{pmatrix} 3-e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+e-e^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dicho sistema equivale a $x_1 = x_3 = 0$ y $(2+e-e^2)x_2 + x_4 = 0$, luego $\mathbf{v}_4 = x + (e^2-e-2)x^2$ es autofunción generadora del espacio $\ker\big(T - (e^2-2)\mathrm{id}\big)$.
Para hallar un iterado $T^n(x^2)$ lo mejor es poner la función x^2 como combinación lineal de autovectores (autofunciones). Es sencillo encontrar que $x^2 = c\,\mathbf{v}_4 - c\,\mathbf{v}_3$ con $c = 1/(e^2-e-2)$, de donde $T^{20}(x^2) = c\,\big(e^2-2\big)^{20}\,\mathbf{v}_4 - c\,e^{20}\,\mathbf{v}_3 \;=\; (e^2-2)^{20}\,x^2 + \frac{(e^2-2)^{20}-e^{20}}{e^2-e-2}\,x$.

Jueves impar.

1. Para cada una de las dos sumas siguientes decide, razonadamente, si es directa o no:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1\\-1\\-1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\3\\-2 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 2\\-1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3\\-3\\-1\\a \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad a=3 \ \text{ y } \ a=-3.$$

2. Diagonaliza el siguiente endomorfismo, es decir halla una base del espacio total $\mathrm{M}_{2\times 2}$ formada por *auto–matrices*, y calcula el iterado que se indica:

$$L : \mathrm{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathrm{M}_{2\times 2}\,, \quad L(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3 \end{pmatrix} A \,-\, A \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2A\,, \qquad L^{20}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jueves par.

1. Para cada una de las dos sumas siguientes decide, razonadamente, si es directa o no:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1\\2\\1\\3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1\\0\\-3\\1 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 1\\4\\2\\7 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} -1\\0\\1\\a \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad a=1 \ \text{ y } \ a=2.$$

2. Diagonaliza el siguiente endomorfismo, es decir halla una base del espacio total $\mathcal{P}_3$ formada por *auto–polinomios*, y calcula el iterado que se indica:

$$L : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3\,, \quad L(p(x)) = 3p(0) + xp'(0) + p'(x) - p(x+1) + 3p(x)\,, \qquad L^{20}(x^2)\,.$$

Viernes impar.

1. Para cada una de las dos sumas siguientes decide, razonadamente, si es directa o no:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\2\\-1 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 1\\3\\3\\-1 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} -1\\-2\\-1\\a \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad a=0 \ \text{ y } \ a=1.$$

2. Diagonaliza el siguiente endomorfismo, es decir halla una base del espacio total $\mathrm{M}_{2\times 2}$ formada por *auto–matrices*, y calcula el iterado que se indica:

$$L : \mathrm{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathrm{M}_{2\times 2}\,, \quad L(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 0 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad L^{20}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Viernes par.

1. Para cada una de las dos sumas siguientes decide, razonadamente, si es directa o no:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1\\1\\-2\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\\0\\2\\0 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 0\\-3\\5\\-6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\3\\0\\a \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad a=6 \ \text{ y } \ a=7.$$

2. Diagonaliza el siguiente endomorfismo, es decir halla una base del espacio total $\mathcal{P}_3$ formada por *auto–polinomios*, y calcula el iterado que se indica:

$$L : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3\,, \quad L(p(x)) = p(1) + (2x-1)p'(x) + p(1-x)\,, \qquad L^{20}(-3x+4x^3)\,.$$
