UAM. ÁLGEBRA LINEAL. CURSO 2009-2010 HOJA Nº 6

Instrucciones:
Resuelve, razonadamente, lo que se indica para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI.
Deberás entregar lo hecho al finalizar la hora de clase, indicando tu nombre y DNI.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$.

Halla, si es posible, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ en salida y llegada sea $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Misma pregunta con $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y con $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

2. Sea $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^4$ el siguiente subespacio: $\mathbb{V} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Demuestra que si $\mathbf{x}$ está en $\mathbb{V}$ entonces $A\mathbf{x}$ está en $\mathbb{V}$. Esto permite definir el endomorfismo: $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}$.

Calcula la matriz de f respecto de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en salida y $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ en llegada.

Lunes impar. *Demuestra que* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *es lineal si y sólo si su grafo es un subespacio vectorial de* $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$.

Resuelve, además, los siguientes ejercicios:

1. El ejercicio **1** del modelo con los siguientes datos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestra que si A es 2×2 entonces $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ es de traza nula.

Por lo tanto, si $\mathbb{V}$ es el espacio de las matrices 2×2 de traza nula entonces tenemos el endomorfismo $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dado por $f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Halla la matriz de f respecto de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ en salida y $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \right\}$ en llegada.

Lunes par. *Demuestra que* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *es lineal si y sólo si su grafo es un subespacio vectorial de* $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$.

Resuelve, además, los siguientes ejercicios:

1. El ejercicio **1** del modelo con los siguientes datos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestra que si $p(x)$ es un polinomio de grado ≤ 2 entonces $(x^2+2x+1)p'(x)+(3-2x)p(x)$ tiene grado ≤ 2.

Luego hay un endomorfismo $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ dado por $f\big(p(x)\big) = (x^2+2x+1)p'(x) + (3-2x)p(x)$.

Calcula la matriz de f respecto de $\{ 1 , x , x^2 \}$ en salida y $\{ x^2 + x - 3 , 2x^2 + x , -x + 5 \}$ en llegada.

Jueves impar. *Sean* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ *espacios vectoriales de dimensiones finitas. Demuestra que* $\dim \operatorname{Hom}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2) = \dim \mathbb{V}_1 \dim \mathbb{V}_2$.

Resuelve, además, los siguientes ejercicios:

1. El ejercicio **1** del modelo con los siguientes datos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestra que si $p(x)$ es un polinomio de grado ≤ 2 entonces $(x^2+x-1)p'(x)+(1-2x)p(x)$ tiene grado ≤ 2.

Luego hay un endomorfismo $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ dado por $f\big(p(x)\big) \longmapsto (x^2+x-1)p'(x)+(1-2x)p(x)$.

Calcula la matriz de f respecto de $\{\,1\,,\,x\,,\,x^2\,\}$ en salida y $\{\,x^2-x-3\,,\,2x^2-x\,,\,x+5\,\}$ en llegada.

Jueves par. *Sean* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ *espacios vectoriales de dimensiones finitas. Demuestra que* $\dim \operatorname{Hom}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2) = \dim \mathbb{V}_1 \dim \mathbb{V}_2$.

Resuelve, además, los siguientes ejercicios:

1. El ejercicio **1** del modelo con los siguientes datos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ o } B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Demuestra que si A es 2×2 y simétrica entonces $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ es simétrica.

Si $\mathbb{V}$ es el espacio de las matrices simétricas 2×2, tenemos el endomorfismo $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dado por $f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Halla la matriz de f respecto de $\Big\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Big\}$ en salida y $\Big\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\Big\}$ en llegada.