Instrucciones:
Esta práctica tiene un peso mayor que las anteriores.
Resuelve, razonadamente, lo que se indica para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI.
Además, puede serte muy beneficioso pensar también los otros ejercicios.
Entrega lo hecho el día 12 de enero de 2010.

Lunes impar

1. Dada la siguiente base de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ halla razonadamente la base de $\mathbb{R}^{3*}$ dual de $\mathcal{B}$.

2. Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un endomorfismo. Dado $\mathbb{L}$, subespacio vectorial de $\mathbb{V}^*$, demuestra que si $\mathbb{L}$ es invariante por F^* entonces $\operatorname{Ann}(\mathbb{L})$ es invariante por F.
Sea ahora $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $h(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con A matriz real $n \times n$ y sea $\mathbf{f} = [\, a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n \,]$ una "auto-fila" de A, es decir que $\mathbf{f}$ es real, $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}_{1\times n}$ y $\mathbf{f}A = c\,\mathbf{f}$ para algún escalar c. Demuestra que $\operatorname{Nul}(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial invariante por h.
¿Qué relación hay entre las dos cuestiones de este ejercicio?

3. Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas respecto de la base canónica.
Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ determina, razonadamente, el número mínimo de ecuaciones del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$ que tienen los sistemas homogéneos cuyo conjunto de soluciones es $\operatorname{Col}(A)$. Halla explícitamente un tal sistema.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo cuya forma canónica de Jordan es $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.
Demuestra que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es cualquier base de Jordan para f entonces $\{\, [\mathbf{v}_2]\,,\, [\mathbf{v}_4] \,\}$ es una base del espacio cociente $\mathbb{R}^4/\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}\,)$.

5. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado no mayor que 3. Definimos un endomorfismo $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ mediante:

$$T\big(p(x)\big) \;=\; (x+1)p(x) - (x^2+4)p'(x) + \frac{x^4 + 8x^2}{3}p'''(x)\ .$$

Comprueba que $1 - 2i$ es autovalor doble de T. Determina, razonadamente, la forma real de T.
Halla una base $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ de $\mathcal{P}_3$ tal que la matriz de T respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ sea la forma real.

Lunes par

1. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado no mayor que 3. Para cada entero no negativo j definimos una forma lineal $\ell_j : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ mediante $\ell_j\big(p(x)\big) = p^{(j)}(0)$. Es decir $\ell_0(p) = p(0)$, $\ell_1(p) = p'(0)$, $\ell_2(p) = p''(0)$, etc. Demuestra que $\mathcal{B}_0^* = \{\, \ell_0\,,\, \ell_1\,,\, \ell_2\,,\, \ell_3 \,\}$ es una base de $\mathcal{P}_3^*$.
Dada la siguiente base de $\mathcal{P}_3$: $\mathcal{B}_1 = \{\, 1\,,\, 1+x\,,\, x+x^2\,,\, x^2+x^3 \,\}$, halla la base dual $\mathcal{B}_1^*$ de $\mathcal{B}_1$ (expresa los elementos de $\mathcal{B}_1^*$ como combinaciones lineales de $\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3$).

2. Sean $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ espacios vectoriales reales (de dimensiones no necesariamente finitas) y una aplicación lineal $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$.
Demuestra que $\ker(f^*) = \operatorname{Ann}\big(\operatorname{im}(f)\big)$.
Demuestra que para toda forma lineal $\alpha : \operatorname{im}(f) \to \mathbb{R}$ se tiene $\alpha \circ f \in \operatorname{Ann}\big(\ker(f)\big)$, y que la aplicación $T : \operatorname{im}(f)^* \to \operatorname{Ann}\big(\ker(f)\big)$ dada por $T(\alpha) = \alpha \circ f$ es lineal y biyectiva.

3. Sean $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas respecto de la base canónica. Definimos un subespacio vectorial $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^{5*}$ por $\mathbb{L} = \langle\, x_1 - x_2 + 2x_3\,,\, 3x_3 + x_4 - 2x_5\,\rangle$. Razona, sin hacer cálculos, cuál es la dimensión del anulador de $\mathbb{L}$. Después, halla una base de dicho anulador.

4. Dados subespacios $E \subseteq F \subseteq \mathbb{V}$, consideramos la aplicación $\varphi : \mathbb{V}/E \to \mathbb{V}/F$ dada por $\varphi(v+E) = v + F$. Demuestra que φ está bien definida y es lineal. Demuestra que $\ker(\varphi) = F/E$.

5. Sea $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales 2×2.
Definimos un endomorfismo $T : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mediante:

$$T(A) \;=\; A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Comprueba que $1 - i$ es autovalor doble de T. Determina, razonadamente, la forma real de T.
Halla una base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz de T respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ sea la forma real.

Jueves impar

1. Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Para $j = 1, 2, 3, 4$ definimos la forma lineal $\ell_j : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mediante $\ell_j(A) = \mathrm{traza}\,(A_j A)$.
Demuestra que $\mathcal{B}^* = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$ es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})^*$.
Halla la base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dual de $\mathcal{B}^*$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ & 3 & 7 \\ & & -4 \end{bmatrix}$.
Halla la forma canónica de Jordan de f.
Halla la forma canónica de Jordan de $f^* : \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}^{3*}$.
(No se piden bases de Jordan).

3. Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y subespacios vectoriales $E, F \subseteq \mathbb{V}$, demuestra las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} E \subseteq F \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{Ann}\,(E) \supseteq \mathrm{Ann}\,(F)\ , \\ \mathrm{Ann}\,(E+F) \quad &= \quad \mathrm{Ann}\,(E) \cap \mathrm{Ann}\,(F)\ . \end{aligned}$$

En el caso de que $\mathbb{V}$ sea de dimensión finita, demuestra también lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} E \subseteq F \\ \mathrm{Ann}\,(E) = \mathrm{Ann}\,(F) \end{array}\right\} \;\Longrightarrow\; E = F\ .$$

4. Sea $\mathcal{C}^0$ el espacio vectorial cuyos vectores son las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en todo punto de $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}^0$ el subespacio formado por las funciones con derivada primera continua en todo punto de $\mathbb{R}$.
Demuestra que el cociente $\mathcal{C}^0/\mathcal{C}^1$ es de dimensión infinita. [Indicación: para cada n, comprueba que las funciones $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ dadas por $f_j(x) = |x - j|$ tienen clases de equivalencia linealmente independientes en $\mathcal{C}^0/\mathcal{C}^1$].

5. Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado no mayor que 3. Definimos un endomorfismo $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ mediante:

$$T\big(p(x)\big) \;=\; xp(x) - (x^2+9)p'(x) + \left(\frac{x^4}{3} + 6x^2\right) p'''(x)\ .$$

Comprueba que $-3i$ es autovalor doble de T. Determina, razonadamente, la forma real de T.
Halla una base $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ de $\mathcal{P}_3$ tal que la matriz de T respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ sea la forma real.

Jueves par

1. Sean $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas respecto de la base canónica.
Halla la base de $\mathbb{R}^3$ dual de $\{\, x - y + 5z \,,\, 3x + y + z \,,\, 2y - z \,\}$.
Halla una base de $\operatorname{Ann}\big(\langle\, 3x + y + z \,,\, 2y - z \,\rangle\big)$. Si ves alguna coincidencia, da una explicación para ella.

2. Sean $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas respecto de la base canónica.
Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el endomorfismo dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{smallmatrix}\right]$, determina la matriz de f^* usando la base $\{\, x \,,\, x + y \,,\, x + y + z \,\}$ en salida y la base $\{\, x \,,\, y \,,\, z \,\}$ en llegada.

3. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial (de dimensión finita o infinita) y sea $\ell_1, ..., \ell_k \in \mathbb{V}^*$ una lista de formas lineales $\ell_1, ..., \ell_k : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Demuestra que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

(a) La lista $\ell_1, ..., \ell_k$ es linealmente independiente.

(b) La aplicación lineal $F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^k$ dada por $F(v) = \begin{bmatrix} \ell_1(v) \\ \vdots \\ \ell_k(v) \end{bmatrix}$ es suprayectiva.

[Indicación: para probar (a)$\Rightarrow$(b), supón que F no es suprayectiva y considera el subespacio vectorial $F(\mathbb{V}) \subset \mathbb{R}^k$ y su anulador].

4. En el espacio $\mathcal{P}$ de los polinomios reales, consideramos el subconjunto:

$$(1 + x^4)\mathcal{P} \;=\; \{\; p(x) \;:\; p(x) \text{ es divisible por } 1 + x^4 \;\} \,.$$

Demuestra que $(1 + x^4)\mathcal{P}$ es un subespacio vectorial y que el espacio cociente $\mathcal{P} \big/ \big((1 + x^4)\mathcal{P}\big)$ tiene dimensión 4. [Indicación: comprueba que es lineal la aplicación $r : \mathcal{P} \to \mathcal{P}_3$ que lleva cada $p(x)$ al resto de dividir $p(x)$ por $1 + x^4$].

5. Sea $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales 2×2.
Definimos un endomorfismo $T : \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mediante:

$$T(A) \;=\; A \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,.$$

Comprueba que $2 - i$ es autovalor doble de T. Determina, razonadamente, la forma real de T.
Halla una base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz de T respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ sea la forma real.