Instrucciones:
Resuelve, razonadamente, lo que se indica para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI.
Deberás entregar lo hecho al finalizar la hora de clase, indicando tu nombre y DNI.

Jueves impar

1. Sea $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de los polinomios reales en la variable x. Consideramos el subespacio vectorial $\mathbb{V} \subset \mathcal{P}$ dado por:

$$\mathbb{V} \;=\; \{\, p(x) \;:\; 5\,p(0) + p'''(0) = 0 \;,\; p(1) = 0 \,\} \;.$$

Halla, razonadamente, un complementario para $\mathbb{V}$ en $\mathcal{P}$. [Indicación: puede ayudarte el ejercicio **1** del viernes impar en esta misma hoja].
¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{V}$? ¿Cuál es la codimensión de $\mathbb{V}$ en $\mathcal{P}$? Razona tus respuestas.

2. Dada la recta vectorial $\mathbb{L} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3$, extrae de la siguiente lista una base del espacio cociente $\mathbb{R}^3/\mathbb{L}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{L}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{L}$.

3. Considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ & -3 & 3 & 4 \\ & & -3 & 0 \\ & & & -3 \end{bmatrix}$.
Determina, razonadamente, la forma canónica de f. Halla, también razonadamente, una base de Jordan para f.

Jueves par

1. Dada $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 12 \end{bmatrix}$, halla un complementario de $\operatorname{Col}(B)$ en $\mathbb{R}^4$.

2. Sean un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y dos subespacios vectoriales $\mathbb{E}, \mathbb{F} \subseteq \mathbb{V}$. Demuestra que la siguiente aplicación:

$$h : \mathbb{E}/(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \;\longrightarrow\; (\mathbb{E} + \mathbb{F})/\mathbb{F} \qquad v + (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \;\overset{h}{\longmapsto}\; v + \mathbb{F}$$

está bien definida, es decir que $h\big(v + (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})\big)$ es lo mismo para todos los $v \in \mathbb{E}$ que representen una misma clase de equivalencia en $\mathbb{E}/(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})$.
Demuestra que h es lineal y biyectiva. Deduce de esto que la codimensión de $\mathbb{F}$ en $\mathbb{E} + \mathbb{F}$ coincide con la codimensión de $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ en $\mathbb{E}$.
Usa este resultado para deducir, en el caso de dimensiones finitas, la fórmula de Grassmann:

$$\dim(\mathbb{E} + \mathbb{F}) \;=\; \dim \mathbb{E} + \dim \mathbb{F} - \dim(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \;.$$

3. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Considera también el endomorfismo $g : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dado por $g(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$.
Determina, razonadamente, la forma canónica de g y la forma real de f. Halla una base de $\mathbb{R}^4$ en la cual f quede en forma real.

Viernes impar

1. Sea $\mathcal{C}^1$ el espacio vectorial cuyos elementos son las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con primera derivada continua en todo punto de $\mathbb{R}$. Definimos un subespacio vectorial $\mathbb{E} \subset \mathcal{C}^1$ mediante:

$$\mathbb{E} \ = \ \{ \, f(x) \ : \ f(0) = f'(0) = 0 \, \} \ .$$

Demuestra que $\langle 1, x \rangle$ es un complementario de $\mathbb{E}$ en $\mathcal{C}^1$.
¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{E}$? ¿Cuál es la codimensión de $\mathbb{E}$ en $\mathcal{C}^1$? Razona tus respuestas.

2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Dados subespacios vectoriales $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{V}$, definimos la aplicación:

$$F : \mathbb{V} \longrightarrow (\mathbb{V}/\mathbb{W}_1) \times (\mathbb{V}/\mathbb{W}_2) \qquad v \ \overset{F}{\longmapsto} \ (\, v + \mathbb{W}_1 \, , \, v + \mathbb{W}_2 \,) \ .$$

Determina el núcleo de F.
Demuestra que si $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ entonces F es suprayectiva.

3. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Considera también el endomorfismo $g : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ dado por $g(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$.
Determina, razonadamente, la forma canónica de g y la forma real de f. Halla una base de $\mathbb{R}^4$ en la cual f quede en forma real.

Viernes par

1. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Dados subespacios vectoriales $\mathbb{W}_0 \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$, demuestra que si $\mathbb{U}$ es un complementario de $\mathbb{W}_0$ en $\mathbb{V}$ entonces $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ es un complementario de $\mathbb{W}_0$ en $\mathbb{W}$.

2. Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -6 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y denotemos por $\mathbf{v}_1$ su primera columna ¿Cuál es la codimensión de $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$ en $\mathrm{Col}\,(B)$? Halla, razonadamente, una base del espacio cociente $\mathrm{Col}\,(B)/\langle \mathbf{v}_1 \rangle$.

3. Considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$.
Determina, razonadamente, la forma canónica de f. Halla, también razonadamente, una base de Jordan para f.