Instrucciones:
Resuelve, razonadamente, lo que se indica para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI.
Deberás entregar lo hecho al finalizar la hora de clase, indicando tu nombre y DNI.

Modelo (resuelto al final). Consideramos un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que depende de los dos parámetros reales α, β:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha-\beta & 0 & \beta \\ -\alpha & 5-\alpha & \alpha \\ -5-\beta & -\alpha & 5+\alpha+\beta \end{bmatrix}.$$

Determina la forma canónica de f en función del par (α, β).
En los siguientes casos, explica en detalle cómo se halla una base de Jordan para f: $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ y $(\alpha, \beta) = (5, 0)$.
En el caso $(\alpha, \beta) = (5, 1)$, calcula una base de Jordan y da una fórmula en función de n para las potencias A^n.

Lunes impar.
1. Determina la forma canónica, en función del par (α, β), del siguiente endomorfismo de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \beta \\ -3 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

En el caso $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, calcula una base de Jordan para f y da una fórmula en función de n para las potencias A^n.

2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real. Decimos que dos endomorfismos $f_1, f_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *conmutan* si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.
Si $f, g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ son endomorfismos que conmutan, demuestra que para cada autovalor real a de f el autoespacio $\ker(f - a\,\mathrm{id}_{\mathbb{V}})$ es invariante por g. Usa esto para hallar las matrices $B \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que conmutan con $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.
Si $g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es un endomorfismo y a, b, c son constantes reales, demuestra que g conmuta con el endomorfismo $h = a\,g^2 + b\,g + c\,\mathrm{id}_{\mathbb{V}}$.
Halla *todas* las matrices $X \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $2X^2 + 5X + I_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Lunes par.
1. Determina la forma canónica, en función del par (α, β), del siguiente endomorfismo de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 2-\beta & \alpha & \beta \\ -1 & 2 & 1 \\ -\beta & \alpha & \beta+2 \end{bmatrix}.$$

En el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, calcula una base de Jordan para f y da una fórmula en función de n para las potencias A^n.

2. Sean un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita, un endomorfismo $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Decimos que $\mathbf{v}$ es un **vector cíclico para** f si la sucesión $\mathbf{v}, f(\mathbf{v}), f^2(\mathbf{v}), \ldots$ contiene un sistema de generadores para $\mathbb{V}$.
Demuestra que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$ no admite vectores cíclicos.
Da, explícitamente, un vector cíclico para $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & \\ & & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.

Jueves impar.
1. Determina la forma canónica, en función del par (α,β), del siguiente endomorfismo de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 4-\alpha & \alpha & 0 \\ -\alpha & 4+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

En el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, calcula una base de Jordan para f y da una fórmula en función de n para las potencias A^n.

2. Sean $f, g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ endomorfismos que *conmutan:* $f \circ g = g \circ f$.
Demuestra que, para cada autovalor a de f, el subespacio $\ker(f-a)$ es invariante por g.
Demuestra que, para cada autovalor a de f, el subespacio $\ker\big((f-a)^2\big)$ es invariante por g.
Utiliza eso para hallar todas las matrices $B \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que conmutan con $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

Jueves par.
1. Determina la forma canónica, en función del par (α,β), del siguiente endomorfismo de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -\alpha & 4 & \alpha \\ 4-\beta & 1 & \beta \end{bmatrix}.$$

En el caso $\alpha = 1$ y $\beta = 4$, calcula una base de Jordan para f y da una fórmula en función de n para las potencias A^n.

2. Sean un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión finita, un endomorfismo $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Decimos que $\mathbf{v}$ es un **vector cíclico para** f si la sucesión $\mathbf{v}$, $f(\mathbf{v})$, $f^2(\mathbf{v})$, ... contiene un sistema de generadores para $\mathbb{V}$.
Demuestra que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(\mathbf{x}) = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$ no admite vectores cíclicos.
Da, explícitamente, un vector cíclico para $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $g(\mathbf{x}) = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & 1 \\ & & 4 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$.

Solución al modelo. En el determinante $\det(A - \lambda I_3)$ sumamos la tercera columna a la primera, y entonces llegamos fácilmente a que este determinante es igual a $(\alpha-\lambda)(\lambda-5)^2$. En vista de esto, distinguimos dos casos: raíz doble o raíz triple.

Caso $\alpha \neq 5$. En este caso los autovalores son: 5 doble, α simple. Las posible formas canónicas de f son:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & \\ & & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ahora observamos que $J_1 - 5I_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \alpha-5 \end{smallmatrix}\right)$ tiene rango 1, y que $J_2 - 5I_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & \alpha-5 \end{smallmatrix}\right)$ tiene rango 2. Por lo tanto la forma canónica será J_1 si $f - 5\,\mathrm{id}$ tiene rango 1, y será J_2 si $f - 5\,\mathrm{id}$ tiene rango 2. En la matriz $A - 5I_3$ la tercera fila de es la suma de las dos primeras, y los coeficientes primero y tercero de la primera fila nunca suman cero, luego:

$$\text{rango}\,\big(A - 5I_3\big) = \text{rango}\begin{bmatrix} \alpha-\beta-5 & 0 & \beta \\ -\alpha & -\alpha & \alpha \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Deducimos que la forma canónica de f es $\left(\begin{smallmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}\right)$ si $\alpha = 0$, y es $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & \\ & & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ si $\alpha \notin \{5, 0\}$.

Fíjate: en este caso el valor de β no influye en la forma canónica.

Caso $\alpha = 5$. En este caso 5 es autovalor *triple,* con lo cual las posibles formas canónicas de f son:

$$J_3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad J_4 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & 1 \\ & & 5 \end{pmatrix},$$

con J_3 correspondiendo a $\operatorname{rango}(f - 5\,\mathrm{id}) = 1$ y J_4 a $\operatorname{rango}(f - 5\,\mathrm{id}) = 2$. De nuevo la tercera fila de $A - 5I_3$ es la suma de las dos primeras, luego:

$$\operatorname{rango}\big(A - 5I_3\big) = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} -\beta & 0 & \beta \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta = 0 \\ \\ 2 & \text{si} \quad \beta \neq 0 \end{cases}$$

Así, pues, en el caso $\alpha = 5$ la forma canónica de f es J_3 si $\beta = 0$ y es J_4 si $\beta \neq 0$.

Caso particular $(\alpha, \beta) = (1, 0)$. Se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

A la vista de J sabemos que las bases de Jordan son de la forma $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1\}$, formadas por una cadena $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ de longitud 2 y autovalor asociado 5, y una cadena $\mathbf{u}_1$ de longitud 1 y autovalor asociado 1. El esquema es:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_2 & \\ \downarrow f - 5\,\mathrm{id} & \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 & \downarrow f - \mathrm{id} \\ \downarrow f - 5\,\mathrm{id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

Vamos a decidir si es mejor construir la cadena de longitud 2 subiendo o bajando.
De $J - 5I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$ deducimos:

$$\operatorname{Im}(f - 5\,\mathrm{id}) \;=\; \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle \;\supset\; \langle \mathbf{v}_1 \rangle \;=\; \ker(f - 5\,\mathrm{id})\,. \tag{1}$$

Lo primero que nos dice (1) es que *no todo* vector de la forma $\big(f - 5\,\mathrm{id}\big)(\mathbf{v})$ es un autovector, y construir la cadena bajando es problemático. En cambio no hay ninguna dificultad en construirla subiendo, pues (1) también dice que todo autovector (de autovalor 5) tiene preimágenes por $f - 5\,\mathrm{id}$.
En este caso, pues, hallamos un autovector $\mathbf{v}_1$ de autovalor 5 y después elegimos una preimagen $\mathbf{v}_2 \in (f - 5\,\mathrm{id})^{-1}\big(\{\mathbf{v}_1\}\big)$, es decir un vector $\mathbf{v}_2$ tal que $(A - 5I_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. También hallamos un autovector $\mathbf{u}_1$ de autovalor 1. La teoría garantiza que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1$ así elegidos son linealmente independientes, luego base de $\mathbb{R}^3$.

Caso particular $(\alpha, \beta) = (5, 0)$. Se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

Las bases de Jordan constan de una cadena de longitud 2 y otra de longitud 1, pero ahora las dos tienen el mismo autovalor asociado 5:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_2 & \\ \downarrow f - 5\,\mathrm{id} & \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 & \downarrow f - 5\,\mathrm{id} \\ \downarrow f - 5\,\mathrm{id} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \end{array}$$

Veamos que en este caso es mejor construir bajando la cadena de longitud 2.
De $J-5I_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ deducimos que $\ker(f-5\,\mathrm{id})=\langle \mathbf{v}_1,\mathbf{u}_1\rangle$ es un plano y que $\mathrm{Im}\,(f-5\,\mathrm{id})=\langle \mathbf{v}_1\rangle$ es una recta contenida en ese plano. Esto implica que *no todo* autovector tiene preimagen por $f-5\,\mathrm{id}$, luego construir la cadena subiendo es problemático. También implica que todo vector de la forma $\big(f-5\,\mathrm{id}\big)(\mathbf{v})$ es o nulo o autovector (de autovalor 5), luego es muy fácil construir la cadena bajando: se elige un $\mathbf{v}_2$ tal que $(A-5I_3)\mathbf{v}_2$ no sea nulo, hacemos $\mathbf{v}_1=(A-5I_3)\mathbf{v}_2$, y después se halla un segundo autovector $\mathbf{u}_1$ de autovalor 5 pero no proporcional a $\mathbf{v}_1$. La teoría garantiza que $\mathbf{v}_1$ es autovector y que $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{u}_1$ son linealmente independientes, luego base de $\mathbb{R}^3$.

Caso particular $(\alpha,\beta)=(5,1)$. Se tiene:

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \\ -6 & -5 & 11 \end{bmatrix} \quad , \quad J=\begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & 1 \\ & & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\} \quad , \quad \begin{array}{l} \mathbf{v}_3 \\ \downarrow f-5\,\mathrm{id} \\ \mathbf{v}_2 \\ \downarrow f-5\,\mathrm{id} \\ \mathbf{v}_1 \\ \downarrow f-5\,\mathrm{id} \\ \mathbf{0} \end{array}$$

Lo único que hay que hacer es elegir un $\mathbf{v}_3$ tal que $\mathbf{v}_2=(A-5I_3)\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_1=(A-5I_3)\mathbf{v}_2$ no sean nulos. Probamos suerte con $\mathbf{v}_3=\mathbf{e}_1$ y salen $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$.
La teoría garantiza que $\mathbf{v}_1$ es autovector y que $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, es decir que $P=[\,\mathbf{v}_1\,|\,\mathbf{v}_2\,|\,\mathbf{v}_3\,]=\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible. Dada $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$, la matriz de f respecto de $\mathcal{B},\mathcal{B}$ es $J=\begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & 1 \\ & & 5 \end{pmatrix}$ y la matriz de f^n respecto de $\mathcal{B},\mathcal{B}$ es J^n, es decir:

$$A^n\,P \;=\; P\begin{pmatrix} 5 & 1 & \\ & 5 & 1 \\ & & 5 \end{pmatrix}^n \;=\; P\begin{pmatrix} 5^n & n5^{n-1} & \binom{n}{2}5^{n-2} \\ & 5^n & n5^{n-1} \\ & & 5^n \end{pmatrix}.$$

Es aceptable el dejar indicada la expresión:

$$A^n \;=\; P\begin{pmatrix} 5^n & n5^{n-1} & \binom{n}{2}5^{n-2} \\ & 5^n & n5^{n-1} \\ & & 5^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

¡Ojo! El vector $\mathbf{v}_1=(A-5I_3)^2\mathbf{v}_3$ está sólidamente unido al $\mathbf{v}_3$, *no podemos simplificarlo* dividiéndolo por 5.

Aunque los ejercicios no lo exigen, evaluemos A^n explícitamente. Efectuando el producto PJ^n y tomando traspuesta:

$$P^t\,(A^n)^t \;=\; \begin{bmatrix} -5\cdot 5^n & 0 & -5\cdot 5^n \\ -5n5^{n-1}-5^n & -5\cdot 5^n & -5n5^{n-1}-6\cdot 5^n \\ -5\binom{n}{2}5^{n-2}-n5^{n-1}+5^n & -5n5^{n-1} & -5\binom{n}{2}5^{n-2}-6n5^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Esto es un sistema simultáneo, con incógnita $(A^n)^t$ y matriz de coeficientes P^t. Lo resolvemos por Gauss-Jordan y obtenemos $(A^n)^t$, y trasponiendo el resultado que sale llegamos a:

$$A^n \;=\; \begin{bmatrix} -5\binom{n}{2}5^{n-2}-n5^{n-1}+5^n & -5\binom{n}{2}5^{n-2} & 5\binom{n}{2}5^{n-2}+n5^{n-1} \\ -5n5^{n-1} & -5n5^{n-1}+5^n & 5n5^{n-1} \\ -5\binom{n}{2}5^{n-2}-6n5^{n-1} & -5\binom{n}{2}5^{n-2}-5n5^{n-1} & 5\binom{n}{2}5^{n-2}+6n5^{n-1}+5^n \end{bmatrix}.$$