Instrucciones:
Resuelve, razonadamente, lo que se indica para el día de la semana que te toca y con la misma paridad que la suma de los dígitos de tu DNI.
Deberás entregar lo hecho al finalizar la hora de clase, indicando tu nombre y DNI.

Lunes impar

1. Se define una sucesión infinita de números $a_1, a_2, a_3, ...$ por las siguientes reglas:

$$\begin{cases} a_1 &= 5\,, \\ a_2 &= 2\,, \\ a_{n+2} &= -9\,a_n + 6\,a_{n+1} \quad , \quad \text{para } \ n \geq 1\,. \end{cases}$$

Da una fórmula para el término general a_n como función de n.

2. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un endomorfismo tal que $f \circ f = f$ (tales endomorfismos se llaman *proyectores*).
Para todo $v \in \mathbb{V}$, demuestra que $f(v) \in \ker(f - \mathrm{id})$ y que $v - f(v) \in \ker(f)$.
Utiliza la igualdad $v = f(v) + (v - f(v))$ para demostrar:

$$\mathbb{V} \;=\; \ker(f - \mathrm{id}) \;\oplus\; \ker(f) \quad , \quad \text{(suma directa)}.$$

Concluye que f es diagonalizable con autovalores (posiblemente múltiples) 0 y 1.

Lunes par.

1. Demuestra la identidad $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ para números cualesquiera a, b
Si B, P son matrices cuadradas, con P invertible, demuestra que $\left(P\,B\,P^{-1}\right)^n = P\,B^n\,P^{-1}$ para todo entero positivo n.
Aprovecha esas dos identidades para hallar una raíz cuadrada de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, es decir una matriz R tal que $RR = A$.

2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión 3, en el que tenemos un endomorfismo f y una base $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ cumpliendo las siguientes condiciones:

$$f(u) = 2\,v \quad , \quad f(v) = \frac{1}{3}\,w \quad , \quad f(w) = 3\,v\,.$$

Halla los autovalores de f. Da explícitamente tres combinaciones lineales de u, v, w que formen una base de $\mathbb{V}$ y sean autovectores de f.

Jueves impar.

1. Se define una sucesión infinita de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ por las siguientes reglas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & 1\,, \\ a_2 & = & 3\,, \\ a_{n+2} & = & -\frac{1}{4}\,a_n - a_{n+1} \quad , \quad \text{para } \; n \geq 1\,. \end{array} \right.$$

Da una fórmula para el término general a_n como función de n.

2. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un endomorfismo tal que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$ (raíz cuadrada de la identidad).
Para todo $v \in \mathbb{V}$ demuestra que $f(v) + v \in \ker(f - \mathrm{id})$ y que $v - f(v) \in \ker(f + \mathrm{id})$.
Utiliza la igualdad $v = \frac{1}{2}\,(f(v) + v) + \frac{1}{2}\,(v - f(v))$ para demostrar:

$$\mathbb{V} \;=\; \ker(f - \mathrm{id}) \;\oplus\; \ker(f + \mathrm{id}) \quad , \quad \text{(suma directa).}$$

Concluye que f es diagonalizable con autovalores (posiblemente múltiples) 1 y -1.

Jueves par.

1. Demuestra la identidad $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$ para números cualesquiera a, b.
Si B, P son matrices cuadradas, con P invertible, demuestra que $\left(P\,B\,P^{-1}\right)^n = P\,B^n\,P^{-1}$ para todo entero positivo n.
Aprovecha esas dos identidades para hallar una raíz cúbica de $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, es decir una matriz R tal que $RRR = A$.

2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial complejo de dimensión 4, en el que tenemos un endomorfismo f y una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cumpliendo lo siguiente:

$$v_1 \overset{f}{\longmapsto} v_2 \overset{f}{\longmapsto} v_3 \overset{f}{\longmapsto} v_4 \overset{f}{\longmapsto} v_1\,.$$

Halla los autovalores de f. Da explícitamente cuatro combinaciones lineales de v_1, v_2, v_3, v_4 que formen una base de $\mathbb{V}$ y sean autovectores de f.