Universidad de Almeria

Departamento de Análisis Matemático

Curso

Métodos Variacionales y Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ireneo Peral Alonso

del
Departamento de Matemáticas

U.A.M.

Trabajo realizado dentro del proyecto PB97-0052

Índice general

NOTACIONES

Notaciones generales

Símbolo	Significado
$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$	Elemento de $I\!R^N$
$r = \|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2)^{1/2}$	Módulo de x
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	Gradiente de u
$\Delta_p u = \mathrm{div}\,(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	p-Laplaciano de u
p'	Exponente conjugado de p, $1/p + 1/p' = 1$
$p^* = Np/(N-p)$	Exponente crítico de Sobolev
$\Omega \subset I\!R^N$	Dominio acotado con frontera lisa
$\partial\Omega$	Frontera de Ω
$\|A\|$	Medida de Lebesgue de $A \subset I\!R^N$
χ_A	Función característica del conjunto A
$\|\| \cdot \|\|_s$	Norma en el espacio $L^s(\Omega)$
$\|\| \cdot \|\|_E$	Norma en el espacio E
B_R	Bola en $I\!R^N$ de radio R centrada en el origen
$B_R(x_0)$	Bola en $I\!R^N$ de radio R centrada en $x_0 \in I\!R^N$
C_N	Medida de la esfera unidad en $I\!R^N$
E'	Espacio dual de E
$\langle , \rangle$	Producto escalar en $I\!R^N$ / dualidad E, E'
δ_x	Delta de Dirac soportada en $x \in I\!R^N$
$T_k(s) = \begin{cases} s & \|s\| \leq k \\ k\dfrac{s}{\|s\|} & \|s\| > k \end{cases}$	Función truncamiento
$\Phi_u(k) = \|\{x \in \Omega : \|u(x)\| > k\}\|$	Función de distribución de u
$c.t.p.$	Casi todo punto
V^+	Parte positiva de la función V, i.e. $V^+ = \text{máx}(V, 0)$
V^-	Parte negativa de la función V, i.e. $V^- = \text{máx}(-V, 0)$

Espacios funcionales

Símbolo	Significado
$\mathcal{C}(\Omega)$	Funciones continuas en Ω
$\mathcal{C}_0(\Omega)$	Funciones continuas en Ω con soporte compacto
$\mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$	Funciones Hölder continuas en Ω
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Funciones de clase k en Ω
$\mathcal{C}^{k,\beta}(\Omega)$	Funciones Hölder continuas de clase k en Ω
$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$	Funciones de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ con soporte compacto
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Funciones indefinidamente diferenciables en Ω
$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$	Funciones de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con soporte compacto
$\mathcal{D}^+(\Omega)$	Funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ no negativas
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espacio dual de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o espacio de las distribuciones
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \longrightarrow I\!R \mid u \text{ medible}, \int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \longrightarrow I\!R \mid u \text{ medible}, \exists C \text{ tal que } \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}$
$L^{p'}(\Omega)$	Espacio dual de $L^p(\Omega)$
$W^{1,p}(\Omega)$	Espacio de Sobolev
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Espacio de Sobolev con traza cero
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Espacio dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$\mathcal{M}^s(\Omega)$	$\{u : \Omega \longrightarrow I\!R \mid u \text{ medible}, \lvert\{\lvert u(x)\rvert > h\}\rvert \leq C_1 h^{-s}\}$
$\mathcal{M}(\Omega)$	Espacio de las medidas de Radon en Ω
$\mathcal{T}^{1,N}(\Omega)$	$\{u \text{ medible en } \Omega, T_k u \in W^{1,N}(\Omega)\}$
$\mathcal{T}_0^{1,N}(\Omega)$	$\{u \text{ medible en } \Omega, T_k u \in W_0^{1,N}(\Omega)\}$

Introducción

Estas notas fueron elaboradas expresamente para el curso que impartí en la Universidad de Almeria del 7 al 9 de Septiembre de 1998.

El Curso consistió en ocho horas de exposición sobre estas notas y otras cuatro horas de Seminario dirigido por mí en las que con la colaboración de José Carmona y Eduardo Colorado discutimos temas paralelos a los aquí tratados. Por razones de espacio y de tiempo dichos temas no están reflejados en estas notas.

Quiero expresar mi agradecimiento al grupo de matemáticos de la Universidad de Almeria por su hospitalidad, muy en especial a la Profesora A. Rubio por su amabilidad al facilitarme con su ayuda la estancia en la ciudad.

Mi agradecimiento al Profesor Arcoya de la Universidad de Granada, de quien partió la iniciativa de este curso, por su invitación y por el apoyo que me presta continuamente.

Espero y deseo que el curso haya sido de alguna utilidad para los participantes y que estas notas puedan ser de utilidad a quien ahora las tiene en las manos.

Madrid, Septiembre de 1998

I. Peral

Capítulo 1

Métodos directos del cálculo de variaciones

1.1. Introducción

A menudo, en las aplicaciones de los métodos matemáticos a los problemas geométricos, físicos o técnicos, se trata de buscar la solución como mínimo de una determinada magnitud: longitud, área, energía, carga, coste, etc.

Algunos ejemplos importantes son los siguientes.

La braquistocrona. En 1696 J. Bernouilli propuso el problema de cual sería entre todas las curvas que unen dos puntos dados, aquella por la que un peso descendería más rápidamente. Dicho de otro modo, si llamamos v a la velocidad, s al espacio recorrido, a a la altura del punto A respecto a B y $u(x)$ a la altura perdida en $x \in (0,1)$, tenemos que la velocidad en x, es $v(x) = \sqrt{2g(a-u(x))}$ y $s'(x) = \sqrt{1+(u'(x))^2}$; pero el tiempo es espacio dividido por velocidad, es decir, el tiempo asociado a una función de descenso u viene dado por,

$$T(u) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+(u'(x))^2}{2g(a-u(x))}}dx.$$

Entonces queremos encontrar $u(x)$ tal que

$$T(u) = \operatorname{ínf}_{v\in\Gamma} T(v)$$

$$\Gamma = \left\{ v : [0,1] \to \mathbb{R}^2 | v(0) = A,\, v(1) = B \right\}.$$

Este es un *problema variacional.*

El principio de Fermat. El hecho de que los caminos de luz viajan por el camino de mínimo tiempo, también es un problema de minimización de un funcional. En este caso el funcional a minimizar es

$$T(u) = \int_{x_o}^{x_1} \eta(x,u)\sqrt{1+(u'(x))^2}dx$$

Al fin este problema y el anterior son matemáticamente muy similares.

El principio de Dirichlet. Cuando se pretende resolver el problema de Dirichlet con datos suficientemente regulares la solución viene caracterizada por ser el mínimo del funcional

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

sobre el espacio de Sobolev $W^{1,2}$.

Las superficies mínimas. Otro ejemplo clásico de problema variacional es el de las superficies mínimas. Dado Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y g una función definida sobre $\partial\Omega$ buscamos una función u definida sobre todo Ω que tome los valores de g en el borde y cuyo grafo tenga área mínima. El planteamiento variacional es como sigue.

De todas las funciones $v : \Omega \to \mathbb{R}$ encontrar una que minimice el funcional de área

$$I(u) = \int_\Omega (1+|\nabla u|^2)^{1/2} dx$$

Todos los problemas anteriores sugieren inmediatamente el estudio de un problema más general. Dados Ω un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $h : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suficientemente regulares, encontrar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ en una determinada clase de funciones, que cambiará de acuerdo al problema, tal que

$$I(v) = \int_\Omega h(x,v,\nabla v)dx \tag{1.1}$$

sea mínimo en esa clase. De forma abstracta podemos considerar la siguiente clase de problemas:

Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea

$$I : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

una función. El problema que nos planteamos es encontrar $u \in X$ tal que

$$\inf_{v\in X} I(v) = I(u).$$

Un problema de minimización plantea tres cuestiones fundamentalmente

i) La existencia de soluciones en algún espacio de funciones $\mathcal{X}$.

ii) La unicidad o multiplicidad de soluciones en $\mathcal{X}$.

iii) La regularidad, es decir, la pertenencia de la solución a un espacio más pequeño $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$.

Cuando tenemos suficiente regularidad en los datos de (1.1), (tanto en el funcional I como en la función h y en el dominio Ω) podemos resolver el problema con la condición clásica de mínimo, esto es $I'(u) = 0$. Este desarrollo da origen a la teoría clásica que estudia la *ecuación de Euler-Lagrange del funcional* que se obtiene como sigue.

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} I(u+\varepsilon\varphi) - I(u) \quad &= \textstyle\int_\Omega \{h(x, u+\varepsilon\varphi, \nabla u + \varepsilon\nabla\varphi) - h(x,u,\nabla u)\}dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \{\varepsilon\varphi \dfrac{\partial h}{\partial u} + \varepsilon\langle\nabla\varphi\nabla_p h\rangle\}dx \end{aligned}$$

entonces, integrando por partes, la condición de mínimo, $I'(u) = 0$, se traduce en que para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I(u+\varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \{\varphi\left(\frac{\partial h}{\partial u} - \operatorname{div}(\nabla_p h)\right)\}dx,$$

es decir,

$$0 = \left(\frac{\partial h}{\partial u} - \operatorname{div}(\nabla_p h)\right)$$

Nosotros en este curso estaremos en general interesados en el camino inverso, es decir, dada una ecuación en derivadas parciales encontrar un funcional del cual sea su ecuación de Euler-Lagrange y obtener los mínimos del funcional por *métodos directos*. Estos métodos son especialmente de interés cuando, o no es posible calcular la ecuación de Euler-Lagrange por falta de regularidad, o cuando, aún conociéndola, no es posible resolverla por métodos de *Ecuaciones en Derivadas Parciales*.

Por ejemplo en el caso elemental de dimensión finita se tiene la situación siguiente.

Supongamos que

$$I : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es acotado inferiormente y sea $\alpha = \inf_{x\in\Omega} I(x)$.

Para obtener una solución al problema, es decir, $x \in \Omega$ tal que $I(x) = \alpha$ procedemos en varias etapas.

- Hallamos una sucesión minizante, esto es, una sucesión

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} I(x_k) = \alpha.$$

- Tratamos de probar que existe $C > 0$ verificando $\|x_k\| < C$ para todo k. Si tenemos éxito, por el teorema de Bolzano-Weierstrass se obtiene que existe una subsucesión convergente.
- Si I es una función continua, obtenemos

$$I(x) = \lim_{k\to\infty} I(x_k) = \alpha$$

Como se ve incluso en el caso de dimensión finita el problema no es trivial y necesitamos hipótesis para que I sea acotado inferiormente, una sucesión minimizante sea acotada y para poder pasar al límite.

La primera observación que cabe hacer al planteamiento anterior es que podemos suponer algo menos que continuidad. Basta suponer que I sea semicontínuo inferiormente (*s.i.*), es decir, basta con tener que si $x_k \to x_0$ entonces

$$\liminf_{k\to\infty} I(x_k) \geq I(x_0).$$

En los ejemplos del comienzo se tiene siempre un *funcional* definido sobre un espacio de funciones de dimensión no finita.

Si bien el programa en el caso infinito dimensional es el mismo, vamos a encontrar las siguientes dificultades añadidas:

- Los compactos en la topología fuerte son pocos, por ello se considerará la topología débil.
- I deberá ser semicontinuo inferiormente en la topología débil, es decir, *debilmente semicontinuo inferiormente* (d.s.c.i.).

Este capítulo está dedicado a la teoría abstracta de los métodos variacionales y a algunas aplicaciones.

1.2. Teoría abstracta

Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $I : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ un funcional, en general no lineal. Suponemos que I está acotado inferiormente, es decir, suponemos que existe una constante M tal que $I(x) > M$ para todo $x \in X$.

Según el caso de dimensión finita, necesitamos sucesiones minimizantes convergentes, o bien, acotadas más algún argumento de compacidad, y alguna propiedad de semicontinuidad inferior en la topología adecuada que permita *realizar el mínimo.*

Para resolver el primer problema se toma X espacio de Banach reflexivo dotado con la topología débil para que todo acotado sea relativamente compacto. Para poder pasar al límite supondremos que I es débilmente semicontinuo inferiormente en el sentido de la siguiente definición.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $I : X \to \overline{I\!R}$. Decimos que I es débilmente semicontinuo inferiormente (d.s.c.i) si y solo si*

$$\liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(u)$$

siempre que $u_\nu \rightharpoonup u$ débilmente en X.

Es fácil probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es d.s.c.i.
2. El conjunto $\mathcal{B}_\lambda = \{x \in X | f(x) \leq \lambda\}$ es débilmente cerrado en X, para todo λ real.
3. Si f es s.c.i. alcanza mínimos sobre compactos.

Puesto que queremos hallar un mínimo de I supondremos siempre que I es *propio* es decir que para todo $u \in X$ se tiene $-\infty < I(u)$ y $I(u) \not\equiv \infty$.

Definición 1.2.2. *El funcional* $I : X \longrightarrow \overline{I\!R}$ *se dice que es coercivo si y solo si existen dos constantes* $\alpha > 0, \beta \in I\!R$ *tales que*

$$I(u) \geq \alpha \|u\|_X + \beta \text{ para cada } u \in X$$

Es evidente que si I es coercivo es acotado inferiormente y toda sucesión minimizante es acotada. Estos hechos se detallan en la prueba del siguiente resultado de minimización.

Teorema 1.2.3. *Sea* X *un espacio de Banach reflexivo y sea* $I : X \to I\!R$ *un funcional propio, débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo. Entonces, existe al menos un* $u_0 \in X$ *tal que*

$$I(u_0) = \alpha = \text{ínf}\,\{I(u)|u \in X\}$$

Demostración. Sea $\{u_k\}$ una sucesión minimizante, $I(u_k) \to \alpha$. La coercividad de I implica que existe un $M \in I\!R^+$ tal que $\|u_k\| < M$ como X es reflexivo tiene que existir una subsucesión $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$ verificando $u_{k_j} \to u_0$ débilmente en X pero como I es d.s.c.i. se tiene

$$\alpha = \text{lím inf}(I(u_{k_j})) \geq I(u_0) \geq \alpha.$$

■

Corolario 1.2.4. *En las hipótesis del teorema anterior si* $\mathcal{M} \subset X$ *es débilmente cerrado, entonces existe* $u_1 \in \mathcal{M}$ *tal que*

$$I(u_1) = \text{ínf}\{I(u)|u \in \mathcal{M}\}.$$

Corolario 1.2.5. *En las hipótesis del teorema anterior se obtienen las mismas conclusiones del Corolario 1.2.4 si* $\mathcal{M} \subset X$ *es convexo y cerrado.*

Recordamos el siguientes resultado que es una aplicación del Teorema Hahn-Banach.

Proposición 1.2.6. *Sea* X *espacio de Banach reflexivo. Si* $C \subset X$ *es un convexo cerrado, entonces* C *es débilmente cerrado.*

(Ver [8] pag. 38).

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la reflexividad es fundamental.

Ejemplo 1.2.7. *Sea*

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in \mathcal{C}([0,1]) | \int_0^{1/2} u(t)dt - \int_{1/2}^1 u(t)dt = 1 \right\}.$$

Claramente $\mathcal{M}$ *es un convexo de* $\mathcal{C}([0,1])$. *Si consideramos* $I(u) = \|u\|_\infty$ *vemos que* $\text{ínf}_{u \in \mathcal{M}} I(u)$ *no se alcanza. En efecto, para* $u \in \mathcal{M}$ *tenemos*

$$I(u) = \|u\|_\infty \geq \int_0^1 |u(x)|dx \geq \int_0^{1/2} u(x)dx - \int_{1/2}^1 u(x)dx = 1$$

entonces $\inf_{u\in\mathcal{M}} I(u) = 1$ *ya que las siguientes funciones continuas son minimizantes*

$$u_n = \begin{cases} 1, \ \textit{si}\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \\ \textit{lineal},\ \textit{si}\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \\ -1,\ \textit{si}\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Ahora si se alcanzara en u tendríamos

$$\|u\|_\infty = \int_0^1 |u(x)|dx = \int_0^{1/2} u(x)dx - \int_{1/2}^1 u(x)dx = 1$$

pero la primera igualdad da $u \equiv 1$ *y entonces las siguientes dan una contradicción.*

En el siguiente ejemplo vemos que la coercividad también es fundamental.

Ejemplo 1.2.8. *Consideramos* $X \equiv W^{1,2}([0,1]) \subset \mathcal{C}([0,1])$ *el espacio de las funciones hölder-continuas. Sea* $\mathcal{M}$ *el subconjunto convexo y cerrado siguiente*

$$\mathcal{M} = \{u \in X \mid u(0) = 1, u(1) = 0\}.$$

Se trata de resolver el problema de minimización sobre $\mathcal{M}$ *del funcional*

$$I(u) = \int_0^1 x[u'(x)]^2 dx.$$

En primer lugar se tiene que $\inf_{\mathcal{M}} I(u) = 0$. *Es bastante claro que* $\inf_{\mathcal{M}} I(u) \ge 0$, *pero además tomando*

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 \quad 0 \le x \le 1/n, \\ \dfrac{-\log x}{\log n} \quad 1/n \le x \le 1, \end{cases}$$

se tiene que $u_n(x) \in \mathcal{M}$ *y que*

$$I(u_n) = \int_0^1 x(u_n'(x))^2 dx = -\int_{1/n}^1 \frac{dx}{x \log^2 n} = -\frac{1}{\log^2 n} \log x]_{1/n}^1 \to 0, \ \textit{as}\ n \to \infty,$$

es decir, $\inf_{\mathcal{M}} u = 0$. *Por otro lado podemos comprobar que tal ínfimo no se alcanza en ningún elemento de* $\mathcal{M}$. *En efecto si suponemos que existe un* u *de* $\mathcal{M}$ *en el que se alcance el mínimo tenemos*

$$0 = \int_0^1 x[u'(x)]^2 dx$$

entonces $u'(x) = 0$ *en casi todo punto y como* $u(0) = 1$, u *no puede ser continua. Contradicción.*

Una vez visto que tanto la coercividad como la reflexividad son imprescindibles el siguiente paso será, naturalmente, obtener criterios de s.c.d.i. para los funcionales, ya que comprobarlo directamente no es, en general, fácil.

Definición 1.2.9. *Dada $f : X \to I\!\!R$ se dice que es convexa si y solo si para todo par $x, y \in X$ y para todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene que*
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

Si f es convexa, propia y $f(x) < \alpha$ para $\|x - x_0\| < r$ entonces f es continua en x_0. En efecto, supongamos para simplificar la notación que $x_0 = 0$ y que $f(0) = 0$ y supongamos además que $f(x) < \alpha$ cuando $\|x\| < r$. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$. La convexidad de f asegura que

$$f(x) = f(\delta\frac{x}{\delta} + (1-\delta)0) \leq \delta f(\frac{x}{\delta}) + (1-\delta)f(0) = \delta f(\frac{x}{\delta})$$

ahora basta tomar $\|x\| \leq \delta r = \dfrac{\varepsilon}{\alpha} r$ para obtener $f(x) \leq \varepsilon$. Por otro lado

$$0 = f(0) = f(\frac{x}{1+\delta} + \frac{\delta}{1+\delta}\frac{-x}{\delta}) \leq \frac{1}{1+\delta}f(x) + \frac{\delta}{1+\delta}f(\frac{-x}{\delta})$$

es decir $-\delta f(\frac{-x}{\delta}) \leq f(x)$ para el mismo δ y si $\|x\| \leq \delta r$ se tiene $-\varepsilon < f(x)$. Luego si $\|x\| \leq \varepsilon \frac{r}{\alpha}$ tenemos $|f(x)| < \varepsilon$ es decir, f es continua en $x_0 = 0$.

Antes de dar los teoremas que usaremos hacemos un resumen de las propiedades de las funciones convexas.

Sea $F : X \to \overline{I\!\!R}$ una función. Dados[1] $u^* \in X^*$ y $\alpha \in I\!\!R$ definimos la función afín

$$\lambda(u) = \langle u, u^* \rangle - \alpha.$$

De esta forma
$$\lambda(u) \leq F(u) \text{ si y solo si } \langle u, u^* \rangle - F(u) \leq \alpha.$$

Dado u^* definimos la función
$$F^*(u^*) = \sup_{u \in X} \{\langle u, u^* \rangle - F(u)\}$$

la cual es la función afín más grande posible que minora F. La función $F^* : X^* \to \overline{I\!\!R}$ definida como la envolvente superior de las funciones afines que minoran F se llama la *función conjugada* de F. Del mismo modo podemos definir la función biconjugada de F como

$$F^{**}(u) = \sup_{u^* \in X^*} \{\langle u, u^* \rangle - F^*(u^*)\}$$

y la envolvente convexa por
$$C = \sup \{g \leq F \mid \quad g \text{ es convexa} \quad \}.$$

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.10. *Sea $f : X \to \overline{I\!\!R}$. Entonces:*

1. *f^* es convexa y semicontinua inferiormente.*

[1] Los asteriscos denotan el espacio dual o un elemento en el espacio dual.

2. *Si f es convexa y semicontinua inferiormente, f^* es propia.*
3. *Se verifica $f^{**} \leq C(f) \leq f$. Y si f es convexa y semicontinua inferiormente $f^{**} = C(f) = f$. En particular si f toma solo valores finitos $f^{**} = C(f)$.*
4. *$f^{***} = f^*$.*

Para las demostraciones de estos hechos consultar ([10], o [17]).

Dado X un espacio de Banach y $f : X \to I\!R$ definimos la derivada de f en x en la dirección de y como el límite siguiente, si existe,

$$f'_y(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}.$$

Definición 1.2.11. *Decimos que f es derivable Gateaux en $x \in X$ si se verifica que*

a) Existen las derivadas direccionales para todo $y \in X$.

b) Existe $f'(x) \in X^*$ tal que

$$f'_y(x) = \langle y, f'(x) \rangle ,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto de dualidad.

Teorema 1.2.12. *Sea $f : X \to I\!R$ diferenciable Gateaux. Entonces:*

(I) Son equivalentes:

$$\begin{array}{ll} i) & f \text{ es convexa.} \\ ii) & \forall x, y \in X \;\; f(y) \geq f(x) + \langle y - x, f'(x) \rangle . \\ iii) & \langle y - x, f'(y) - f'(x) \rangle \geq 0. \end{array}$$

(II) Si f es convexa entonces $f(x) + f^*(f'(x)) = \langle x, f'(x) \rangle \quad \forall x \in X$.

Demostración. (I)

$i) \Rightarrow ii)$

Sea $0 < \lambda < 1$, la convexidad de f implica que

$$\begin{array}{ll} f(x + \lambda(y - x)) - f(x) & = f(x(1-\lambda) + \lambda y) - f(x) \leq \\ (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - f(x) & = \lambda (f(y) - f(x)) \end{array}$$

entonces

$$\frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

tomando límite cuando $\lambda \to 0$ y usando la hipótesis de que el límite existe tenemos

$$\langle y - x, f'(x) \rangle \leq f(y) - f(x).$$

$ii) \Rightarrow i)$

Podemos escribir la desigualdad en $ii)$ para x, y en relación a $\lambda x + (1-\lambda) y$, es decir,

$$\begin{array}{ll} f(x) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) + & \langle x - (\lambda x + (1-\lambda) y), f'(\lambda x + (1-\lambda) y \rangle \\ f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) + & \langle y - (\lambda x + (1-\lambda) y), f'(\lambda x + (1-\lambda) y \rangle \end{array}$$

multiplicando la primera desigualdad por λ y la segunda por $(1-\lambda)$ y sumando resulta

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y),$$

es decir, f es convexa.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*

Tomando la desigualdad en *ii)*.

$$\begin{array}{ll} f(y) \geq f(x) & + \langle y-x, f'(x)\rangle \\ f(x) \geq f(y) & + \langle x-y, f'(y)\rangle \end{array}$$

se tiene,

$$\langle y-x, f'(x)\rangle \leq f(y) - f(x) \leq \langle y-x, f'(y)\rangle$$

entonces

$$0 \leq \langle y-x, f'(y) - f'(x)\rangle .$$

iii) $\Rightarrow$ *ii)*

Para λ positivo sea $\phi(y) = f(x + \lambda(y-x))$, observamos que

$$\begin{array}{ll} \phi'(\lambda) - \phi'(0) = \langle y-x, f'(x+\lambda(y-x)) - f'(x)\rangle & = \\ \frac{1}{\lambda}\langle x+\lambda(y-x) - x, f'(x+\lambda(y-x)) - f'(x)\rangle & \geq 0 \end{array}$$

por hipótesis. Entonces

$$\phi(\lambda) \geq \phi(0) + \lambda\phi'(0)$$

y poniendo $z = x + \lambda(y-x)$ resulta

$$f(z) \geq f(x) + \langle z-x, f'(x)\rangle .$$

(II)

Queremos probar que para todo $x \in X$ se verifica

$$f(x) + f^*(f'(x)) = \langle x, f'(x)\rangle$$

En primer lugar la definición de f^* implica que

$$f^*(f'(x)) \geq \langle x, f'(x)\rangle - f(x).$$

De otra parte por $I)$ y la convexidad de f se tiene,

$$f(y) \geq f(x) + \langle y-x, f'(x)\rangle \quad \forall x, y \in X,$$

es decir,

$$f(y) \geq f(x) + \langle y, f'(x)\rangle - \langle x, f'(x)\rangle ,$$

o bien,

$$\langle x, f'(x)\rangle - f(x) \geq \langle y, f'(x)\rangle - f(y) \quad \forall x, y \in X$$

tomando el supremo en y obtenemos

$$f^*(f'(x)) \leq \langle x, f'(x) \rangle - f(x).$$

■

Una extensión del teorema anterior que es útil por no hacer hipótesis de diferenciabilidad es la siguiente.

Teorema 1.2.13. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua y convexa. Para cada $x \in X$ existe un $x^* \in X^*$ tal que*

$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \quad \forall y \in X.$$

Además

$$f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle .$$

La demostración puede ser encontrada en el libro de Dacorogna [10], pag.41.

Nota 1.2.14. *Un $x^* \in X^*$ verificando la desigualdad del Teorema se llama un subgradiente para f en $x \in X$.*

Ciertamente si f es diferenciable Gateaux en x, x^* es único y coincide con $f'(x)$. Se suele llamar *subdiferencial* de f en x a todos los vectores subgradiente de f en x.

Ejemplo 1.2.15. Consideremos la función $f(x) = |x|$ en $\mathbb{R}$. Todos los vectores unitarios salvo el cuadrante $(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ son la subdiferencial de f en $x = 0$. ■

Vamos a enunciar un lema que usaremos después.

Lema 1.2.16. *(Mazur) Sea X un espacio de Banach y sea $x_k \rightharpoonup x$ debilmente en X. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1(\varepsilon), \ldots, \alpha_{n(\varepsilon)}(\varepsilon) \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_i = 1$ y verificándose,*

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \alpha_i x_i \right\|_X \leq \varepsilon.$$

(Ver [44].)
Un teorema que será útil es el siguiente.

Teorema 1.2.17. *Sea X un espacio de Banach y sea $I : X \to \overline{\mathbb{R}}$ convexo y semicontinuo inferiormente, entonces I es d.s.c.i.*

Demostración. Usaremos el anterior lema de Mazur. Hemos de probar que si $u_k \rightharpoonup u$ debilmente en X entonces

$$L = \liminf_{k\to\infty} I(u_k) \geq I(u).$$

Extrayendo una subsucesión podemos sustituir ese límite inferior por

$$L = \lim_{k\to\infty} I(u_k).$$

Además podemos suponer que ese límite es finito ya que en otro caso el resultado es inmediato. Como I es convexo y *s.i.*, existen $\alpha \in I\!R$ y $u^* \in X^*$ tales que

$$I(u) > \langle u, u^* \rangle + \alpha \quad \forall u \in X$$

y como $u_k \rightharpoonup u$, $\|u_k\| \leq K$ luego

$$I(u_k) > \alpha - \|u^*\| \|u_k\| > -\infty$$

luego $L > -\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$I(u_k) \leq L + \varepsilon \quad \forall k > N(\varepsilon). \tag{1.2}$$

Por el lema de Mazur existen $n(\varepsilon)$ y $\alpha_i(\varepsilon) > 0$ con $i = N, \ldots, n(\varepsilon) + N$ verificando

$$\sum_{N}^{n(\varepsilon)+N} \alpha_i = 1 \quad \text{y} \quad \left\| u - \sum_{i=N}^{N+n(\varepsilon)} \alpha_i u_k \right\| \leq \varepsilon$$

la convexidad de I unida a la desigualdad (1.2) implica

$$I \left(\sum_{i=N}^{N+n(\varepsilon)} \alpha_i u_k \right) \leq \sum_{i=N}^{N+n(\varepsilon)} \alpha_i I(u_k) \leq \left(\sum_{i=N}^{N+n(\varepsilon)} \alpha_i \right) (L + \varepsilon) \equiv L + \varepsilon$$

como I es *s.i.* se tiene

$$I(u) \leq \liminf_{\varepsilon_k \to 0} \left(I \left(\sum_{i=N}^{N+n(\varepsilon_k)} \alpha_i u_i \right) \right) \leq \lim_{e_k \to 0} (L + \varepsilon_k) = L$$

■

Para muchos problemas son útiles los resultados siguientes:

Proposición 1.2.18. *La norma en todo espacio de Banach es débilmente semicontinua inferiormente.*

Demostración. El teorema de Banach-Steinhauss permite concluir que siempre que tengamos una sucesión u_k verificando que converge debilmente, $u_k \rightharpoonup u$, entonces la sucesión u_k está acotada. Además si $f \in X^*$ tenemos

$$|\langle u, f \rangle| = \lim_{k \to \infty} |\langle u_k, f \rangle| \leq \liminf_{k \to \infty} \|u_k\|_X \|f\|_{X^*}$$

como

$$\|u\|_X = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |\langle u, f \rangle|$$

resulta

$$\|u\|_X \leq \liminf_{k \to \infty} \|u_k\|_X.$$

■

En la prueba del siguiente teorema juega un papel importante el lema que se detalla a continuación

Lema 1.2.19. *Sea $F : C \subset X \to I\!R$ un funcional definido sobre un subconjunto convexo y cerrado C de un espacio de Banach X. Si F es diferenciable Gateaux, entonces son equivalentes*

a) F *es convexa.*
b) $F' : X \to X^*$ *es un operador monótono, es decir*

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_1) - F'(u_2)\rangle \geq 0.$$

Demostración. *a)* $\Rightarrow$ *b)*

Como F es convexa se tiene

$$\begin{aligned} \langle u_2 - u_1, F'(u_1)\rangle &\quad + F(u_1) \leq F(u_2) \\ \langle u_1 - u_2, F'(u_2)\rangle &\quad + F(u_2) \leq F(u_1) \end{aligned}$$

por tanto tenemos

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_2)\rangle \leq F(u_1) - F(u_2) \leq \langle u_1 - u_2, F'(u_1)\rangle$$

es decir,

$$\langle u_1 - u_2, F'(u_1) - F'(u_2)\rangle \geq 0$$

b) $\Rightarrow$ *a)*
Supongamos que F' es un operador monótono. Sean $u, v \in X$ fijos y sea $t > 0$. La función $\phi(t)$ dada por $\phi(t) = F(u + t(v - u))$ es derivable y

$$\phi'(t) = \langle v - u, F'(u + t(v - u))\rangle .$$

Ahora bien

$$\phi'(t) = \frac{1}{t}\langle u + t(v - u) - u, F'(u + t(v - u))\rangle$$

como

$$\phi'(0) = \langle v - u, F'(u)\rangle = \frac{1}{t}\langle u + t(v - u) - u, F'(u)\rangle$$

entonces

$$\phi'(t) - \phi'(0) = \frac{1}{t}\langle u + t(v - u) - u, F'(u + t(v - u)) - F'(u)\rangle \geq 0$$

es decir, $\phi'(t) \geq \phi'(0)$, reescalando en $t = (s - s_0)$ se obtiene que $\phi'(t)$ es monótona y por tanto $\phi(t)$ convexa. Pero entonces

$$\phi(t) \leq t\phi(1) + (1 - t)\phi(0),$$

o bien,

$$F(u + t(v - u)) \leq tF(v) + (1 - t)F(u),$$

es decir, F es convexa ■

Teorema 1.2.20. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y sea $C \subset X$ un subconjunto convexo, cerrado y no vacío. Sea $F : C \subset X \to I\!R$ una aplicación semicontinua inferiormente, convexa y diferenciable Gateaux. Entonces, si $u \in C$ son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll} i) & F(u) = \inf_{v \in C} F(v). \\ ii) & \langle F'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C. \\ iii) & \langle F'(v), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C. \end{array}$$

Demostración.

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Si u realiza el mínimo, tenemos

$$F(u) \leq F((1-\lambda)u + \lambda v) \quad \forall v \in C, \, \lambda \in (0,1)$$

por tanto

$$\frac{1}{\lambda}\{F((1-\lambda)u + \lambda v) - F(u)\} \geq 0$$

es decir,

$$\langle F'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C.$$

ii) $\Longrightarrow$ *i)* Para cada $v \in C$ y cada $\lambda \in (0,1)$ se tiene por convexidad

$$F(v) - F(u) \geq \frac{1}{\lambda}\{F((1-\lambda)u + \lambda v) - F(u)\}$$

y tomando límites y por hipótesis

$$F(v) \geq F(u).$$

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Como F es convexa, F' es un operador monótono, es decir,

$$\langle F'(v) - F'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in C$$

y si u verifica $\langle F'(u), (v-u) \rangle \geq 0$ sumando se tiene

$$\langle F'(v), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C.$$

iii) $\Longrightarrow$ *ii)* Dado $w \in C$ basta tomar $v = (1-\lambda)u + \lambda w$ y sustituir en *iii)* para obtener

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle F'(v), v-u \rangle & = \langle F'((1-\lambda)u + \lambda w), (1-\lambda)u + \lambda w - u \rangle \\ & = \lambda \langle F'(u + \lambda(w-u)), w-u \rangle . \end{aligned}$$

Si consideramos la función $g(\lambda) = F(u + \lambda(w-u))$ su derivada es

$$g'(\lambda) = \langle F'(u + \lambda(w-u)), w-u \rangle$$

y tomando límite para $\lambda \to 0$,

$$\langle F'(u), w-u \rangle \geq 0.$$

■

1.3. Aplicación a problemas elípticos no lineales

El operador *p-Laplaciano* se escribe como

$$\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \quad \infty > p > 1$$

y aparece en muchos contextos y para nosotros en este curso de la manera más natural posible: resulta como la parte principal de la ecuación de Euler cuando tratamos de minimizar la norma L^p del gradiente. Por otra parte es el prototipo de operador elíptico *quasilineal* degenerado por lo que resulta ser un ejemplo muy interesante.

Es evidente que si $p = 2$, se trata del operador Laplaciano clásico.

Aparece también como aproximación de modelos de difusión no lineal en contextos aplicados diversos.

Se trata de resolver el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x), \text{ si } x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde $\Omega \subset I\!R^N$ es un dominio acotado y $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ siendo p' el conjugado de p, es decir $p' = p/(p-1)$.

Teorema 1.3.1. *Si Ω es un dominio acotado y $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, el problema (1.3) tiene una solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, en el sentido siguiente*

$$\int \{\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\phi\rangle - f\phi\} dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{1.4}$$

Demostración. Consideramos el funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f(x) u dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

y observamos que su derivada Gateaux en la dirección de ϕ viene dada por (1.4). Entonces el problema (1.3) se puede resolver variacionalmente minimizando el funcional aplicando el teorema abstracto. Lo único que tenemos que hacer es verificar las hipótesis del teorema.

i) J es coercivo pues

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|\nabla u\|_p \\ &\geq \frac{1}{2p}\|\nabla u\|_p^p - C\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^{p'}. \end{aligned}$$

ii) J es d.s.c.i ya que el primer sumando es la norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$, y el segundo si tenemos $u_k \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ por la definición de convergencia débil tenemos $\int u_k f \to \int u f$.

Luego podemos aplicar el teorema y concluir que $J(u)$ alcanza un mínimo. ∎

Nota 1.3.2. 1) *Dada* $g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *el problema,*

$$-\Delta_p u = f(x), \quad (u-g) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

se resuelve minimizando en $\mathcal{G} = \{g + u \quad | \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$ *el mismo funcional.*

2) *El problema de Neumann natural es*

$$-\Delta_p u = f(x), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = g,$$

ν *normal exterior a* $\partial\Omega$*, con la condición de compatibilidad*

$$\int_\Omega f(x) \quad dx = -\int_{\partial\Omega} g(x) \quad d\sigma(x).$$

Para estudiar las propiedades del operador inverso de $-\Delta_p$ estableceremos el siguiente resultado de cálculo.

Lema 1.3.3. *Sean* $x, y \in I\!R^N$ *y sea* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *el producto escalar canónico en* $I\!R^N$. *Entonces*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} c|x-y|^p, & si \quad p \geq 2, \\ c\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & ,si \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Demostración. Por homogeneidad podemos suponer que $|x| = 1$ y que $|y| \leq 1$. Además si nos referimos al plano generado por x e y podemos escribir $x = (1, 0, \ldots, 0)$, $y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0)$ y $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1$.

Caso 1. $1 < p < 2$. Establecer esa desigualdad es equivalente a establecer que

$$\left\{\left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)(1-y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right\} \frac{\left(1 + \sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \geq C, \tag{1.5}$$

pero como

$$1 - \frac{y_1}{\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right)^{2-p}} \geq \begin{cases} 1 - \dfrac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geq (p-1)(1-y_1) & \text{si} \quad 0 \leq y_1 \leq 1, \\ 1 - y_1 \geq (p-1)(1-y_1) & \text{si} \quad y_1 \leq 0, \end{cases}$$

resulta que (1.5) mayora a

$$(p-1)\{(1-y_1)^2 + y_2^2\} \frac{\left(1 + y_1^2 + y_2^2\right)^{\frac{2-p}{2}}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \geq p - 1.$$

Caso 2..

$$p \geq 2.$$

La desigualdad es equivalente a

$$\frac{\left[1 - y_1\left(y_1^2 + y_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right](1-y_1) + y_2^2\left(y_1^2 + y_2^2\right)^{\frac{p-2}{2}}}{((1-y_1)^2 + y_2^2)^{\frac{p}{2}}} \geq C$$

si llamamos $t = \dfrac{|y|}{|x|}$ y $s = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$ tenemos que lo que hay que demostrar es que la función

$$f(t,s) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{\frac{p}{2}}}$$

está acotada inferiormente.

Calculando para t fijo dónde se verifica $\partial f / \partial s = 0$ resulta

$$1 - (t^{p-1} + t)s + t^p = \frac{t^{p-2} + 1}{p}(1 - 2ts + t^2)$$

entonces en los puntos críticos s de f se tiene

$$\begin{aligned} f(t,s) &= \frac{t^{p-2}+1}{p}\frac{1}{(1-2ts+t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{p}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{p}\,\text{mín}_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{N-2}+1}{t+1} \geq \frac{1}{2p}. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.3.4. *Sea $\Omega \subset I\!R^N$ un dominio acotado.*
A) $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ es uniformemente continuo sobre conjuntos acotados.
B) Existe $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ y es continuo.
C) El operador extendido $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ es compacto si $1 \leq q < \dfrac{pN}{N-p}$.

Demostración. Demostración de A).

Sea $\mathcal{C} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ un conjunto acotado, y sea M tal que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < M \quad \text{si} \quad u \in \mathcal{C}.$$

Si $u, v \in \mathcal{C}$ se tiene

$$\| -\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_\Omega \langle \Delta_p u - \Delta_p v, \nabla\phi\rangle\, dx \leq$$

$$\leq \begin{cases} \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} C_q \quad \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2}\right)|\nabla u - \nabla v||\nabla\phi|dx, & p \geq 2 \\ \sup_{\|\phi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} C_q \quad \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p-1}|\nabla\phi|dx, & 1 < p < 2 \end{cases}$$

entonces si $p \geq 2$ y aplicando la desigualdad de Hölder $(\frac{p-2}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1)$ resulta

$$\| -\Delta_p u - (-\Delta_p v)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C_q \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2} \right)^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \|\nabla(u-v)\|_p$$

$$\leq 2C_q M^{p-2} \|\nabla u - \nabla v\|_p$$

Demostración de B). Para demostrar la existencia de $(-\Delta_p)^{-1}$ basta con probar la unicidad. Sean $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dos soluciones de los problemas $-\Delta_p u_1 = f_1$, $-\Delta_p u_2 = f_2$ entonces

$$\int_\Omega \left[-\Delta_p u_1 - (-\Delta_p u_2) \right] (u_1 - u_2) dx = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle$$

pero por el lema anterior tenemos

$$\int_\Omega \left[-\Delta_p u_1 - (-\Delta_p u_2) \right] (u_1 - u_2) dx = \int_\Omega \left\langle |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2, \nabla(u_1 - u_2) \right\rangle dx \geq$$

$$\geq \begin{cases} C_p \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx \quad \text{si} \quad p \geq 2 \\ C_p \int_\Omega \dfrac{|\nabla(u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \quad \text{si} \quad 1 < p < 2 \end{cases}$$

entonces si $p \geq 2$

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx \leq c_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,p'}} \|\nabla(u_1 - u_2)\|_p$$

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|_p \leq c_p^\alpha \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}$$

en particular si $f_1 \equiv f_2$ se tiene $u_1 \equiv u_2$.

Si $1 < p < 2$ se tiene

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \leq C_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

y de otra parte usando la desigualdad de Hölder,

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx = \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1 - u_2)|^p}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1 - u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} dx \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p dx \right)^{\frac{2-p}{p}}$$

es decir,

$$\frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\|u_1\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \right)^{2-p}} \leq C_p \|f_1 - f_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}.$$

Así tenemos la unicidad y la continuidad del operador inverso.

Por último, C) es consecuencia de B) y de la inclusión de Sobolev. ∎

1.3.1. Un problema semilineal en todo $I\!R^N$

Otro tipo de problema a resolver es el siguiente

$$\begin{cases} -\Delta u + u + G'(u) = f, & x \in I\!R^N \\ f \in L^2(I\!R^N), & u \in L^2(I\!R^N) \end{cases} \tag{1.6}$$

donde se verifican las hipótesis

$(G1)$ $G : I\!R \longrightarrow I\!R$ es convexa y no negativa.

$(G2)$ G' se supone regular y $G(0) = 0$

Para resolver (1.6) consideramos el funcional

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{I\!R^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{I\!R^N} |u|^2 dx + \int_{I\!R^N} G(u)dx - \int_{I\!R^N} fudx$$

evidentemente $F(u) < +\infty$ si $u \in \mathcal{K}$ siendo

$$\mathcal{K} = W^{1,2}(I\!R^N) \cap \left\{ u : \quad \int\limits_{I\!R^N} G(u)dx < +\infty \right\}.$$

Necesitamos el siguiente resultado

Lema 1.3.5. *Si $G(u)$ es convexa y si definimos*

$$\mathcal{G}(u) = \int_{I\!R^N} G(u)dx$$

tenemos que $\mathcal{G}(u)$ es semicontinua inferiormente sobre $L^p(I\!R^N)$ con $1 < p < \infty$. Además como $\mathcal{G}$ es convexa, es débilmente semicontinua inferiormente.

Demostración. Sea $\{u_k\} \subset L^p$ una sucesión tal que $u_k \to u$ en L^p. Entonces existe una subsucesión que converge puntualmente. Por el lema de Fatou y puesto que G es continua se concluye

$$\mathcal{G}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{G}(u_k).$$

■

Para resolver el problema observamos que

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_2^2 - \|f\|_2\|u\|_2 \geq \frac{1}{4}\|u\|_2^2 - c\|f\|_2^2$$

La coercividad implica que $\mathcal{C} = \{u \in L^2(I\!R^N) : F(u) \leq R\}$ es un conjunto acotado y no vacío de $L^2(I\!R^N)$. Como F es convexa y es d.s.c.i. existe $u_0 \in L^2(I\!R^N)$ tal que

$$F(u_0) = \inf_{u \in L^2(I\!R^N)} F(u)$$

que es solución débil de nuestro problema.

1.4. El problema del plasma

En las condiciones de presión y temperatura de la corteza terrestre e incluso en las condiciones que somos capaces de crear en un laboratorio convencional, la materia sólo puede presentarse en los tres estados clásicos, sólido, líquido y gaseoso, que se caracterizan por que los átomos conservan determinada estructura y los núcleos se mantienen separados unos de otros. Pero a las grandes presiones del interior de algunos planetas y a las elevadísimas temperaturas de las estrellas la materia presenta estructuras más complejas que deben considerarse como estados distintos de los tres anteriores.

Sometida a presiones crecientes, la corteza electrónica de los átomos terminará por colapsarse. No podrá ya hablarse de átomos, si no de una amalgama comprimida de electrones y núcleos, de gran densidad, que habrá perdido la rigidez del estado sólido o líquido, pero que la gran movilidad de los electrones libres harán que este estado conserve muchas de las propiedades de los gases muy densos.

Cuando la materia se somete a temperaturas suficientemente altas, los átomos que la componen comienzan a disociarse, siendo esta disociación casi completa a temperaturas del orden de $10^8\ {}^oK$. Como consecuencia de ese proceso el conjunto de electrones y núcleos constituye otro nuevo estado de la materia denominado *plasma*.

La producción de plasmas en nuestro planeta exige, por tanto, el calentamiento de gases hasta temperaturas muy elevadas. En ese sentido los plasmas de hidrógeno, especialmente los de deuterio, han merecido una atención preferente en los últimos años con motivo de los intentos de producción de reacciones termonucleares controladas, orientadas a la producción de energía.

Entre los muchos problemas teóricos y técnicos que se plantean ante el estudio de los plasmas está la evidente imposibilidad de construir un recipiente que soporte esas temperaturas. Aunque se consiguiera un material que las soportase el plasma desaparecería por enfriamiento al contacto con las paredes de éste. Esa es la razón de la aparición de métodos dónde el plasma es obligado a permanecer en una región determinada del espacio bajo la acción de un campo magnético producido por inducción, es lo que se llama *confinamiento magnético*. Una vez confinado el combustible, deuterio, en esa región se le imprime una gran cantidad de energía de forma que se obtengan muchas colisiones, que a su vez calentarán más el plasma y producirán más energía.

Las reacciones de fusión que se observan con más frecuencia son :

$$\begin{array}{l} H_1^1 + \eta \longrightarrow H_1^2 + 2,226 MeV \\ H_1^1 + H_1^1 \longrightarrow H_1^2 + e^+ + \nu + 1,350 MeV \\ H_1^1 + H_1^2 \longrightarrow H_1^3 + e^+ + \nu + 4,600 MeV \\ H_1^2 + H_1^2 \longrightarrow H_2^4 + \nu + 17,60 MeV \end{array}$$

dónde H_1^1 es hidrógeno, H_1^2 es deuterio, H_2^4 es helio, η es un neutrón , ν es un neutrino, e^+ es un positrón y las cantidades numéricas son energías.

1.4.1. El modelo de Grad-Shafranov

Consideramos una región toroidal del espacio parcialmente ocupada por plasma. Llamaremos Ω a una sección vertical del toro, $\Omega_p \subset \Omega$ será la parte ocupada por el plasma, mientras que Ω_v será la parte vacía. Denotaremos por Γ la frontera de Ω y por Γ_p la de Ω_p. Evidentemente $\Omega_v = \Omega \setminus \Omega_p$ y mientras que la frontera de Ω es un conjunto determinado desde el principio, la de Ω_p sólo es conocida inicialmente. A medida que el plasma va ocupando la región vacía el conjunto Γ_p va cambiando, es decir, Γ_p *es otra* *incógnita* del problema , es lo que se llama una *frontera libre.* Por tanto en la región dónde hay plasma se induce una corriente y las ecuaciones de Maxwell se expresan:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \text{en} & \Omega \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 & \text{en} & \Omega_v \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{J} & \text{en} & \Omega_p \\ \nabla p = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} & & \end{array}$$

donde $\mathbf{B}$ es el campo magnético, $\mathbf{J}$ es el campo eléctrico y, si denotamos por η la normal exterior a Ω_v, las condiciones de contorno naturales del problema se escriben

$$\begin{array}{lll} \langle \mathbf{B}, \eta \rangle = 0 & \text{en} & \Gamma \cup \Gamma_p \\ \mathbf{J}_\theta = 0 & \text{en} & \Gamma_p \cup \Omega_v \\ \mathbf{J}_\theta > 0 & \text{en} & \Omega_p \end{array}$$

por último se prescribe la corriente eléctrica longitudinal por la fórmula

$$I = \int_{\Omega_p} J_\theta dx > 0$$

para obtener las ecuaciones que gobiernan nuestro sistema.

La primera aproximación consiste en suponer que para tiempos pequeños la región Ω_v no varía mucho. La segunda simplificación del problema consiste en suponer cierta simetría, más precisamente, en una posición de equilibrio se supone que $\mathbf{B}, \mathbf{J}$ y la presión p no dependen de θ, esta hipótesis permite usar coordenadas cilíndricas (r, θ, z). En este sistema de coordenadas el campo magnético total se escribe:

$$\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_z \mathbf{e}_z$$

y el eléctrico

$$\mathbf{J} = J_r \mathbf{e}_r + J_\theta \mathbf{e}_\theta + J_z \mathbf{e}_z.$$

Para obtener la expresión definitiva de las ecuaciones que gobiernan el sistema pasamos a coordenadas cilíndricas

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (r B_z) \right] = 0$$

y como no depende de θ, se tiene $\mathbf{B}(r, z)$ satisfaciendo

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z) \tag{1.7}$$

o dicho de otro modo el campo (rB_r, rB_z) tiene divergencia nula en $\mathbb{R}^2$ y por tanto existe un potencial u tal que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r B_z \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -r \mathbf{B}_r$$

ahora bien, como

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \tag{1.8}$$

llamando $f(r,z) = rB_\theta$ y $L[u] \equiv -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]$, resulta,

$$L[u] = 0, \text{ en } \Omega_v$$

y en Ω_p la ecuación rot $\mathbf{B} = \mathbf{J}$ implica

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_r + L[u]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_z = \mathbf{J}.$$

La ecuación $\nabla p = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = (\text{rot } \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}$ en Ω_p se transforma en

$$\text{A)} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}L[u]\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial f^2}{\partial r}$$

$$\text{B)} \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$\text{C)} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r}L[u]\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial f^2}{\partial z}$$

la segunda ecuación implica que $f = \phi(u)$, o bien $f^2 = g_0(u)$ y así $\nabla f^2 = g_0'(u)\nabla u$. Por otro lado de A) y C) resulta

$$\nabla p = \left[\frac{1}{r}L[u] - \frac{1}{2r^2}g_0'(u)\right]\nabla u$$

es decir, los vectores ∇p y ∇u son paralelos, o lo que es lo mismo existe una función g_1 tal que $p = g_1(u)$ y de ahí $\nabla p = g_1'(u)\nabla u$ donde

$$g_1'(u) = \frac{1}{r}L[u] - \frac{1}{2r^2}g_0'(u) \quad \text{en} \quad \Omega_p.$$

Es decir,

$$L[u] = \begin{cases} g(r,u) & \left(\equiv \frac{1}{2r}g_0'(u) + rg_1'(u)\right) \quad \text{en} \quad \Omega_p \\ 0 \quad \text{en} \quad \Omega_v \end{cases}$$

Por otra parte las condiciones de contorno se traducen en

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{B}, \eta \rangle = 0 \Rightarrow \\ &0 = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}u_z = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \tau} \end{aligned}$$

siendo τ el vector tangente a Γ_p y Γ. Así tenemos $u \equiv cte$ en $\Gamma \cup \Gamma_p$ como u es un potencial por adición de una constante se puede poner,

$$\begin{aligned} u = &\quad 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_p \\ u = &\quad \beta \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

Por último

$$I = \int_{\Omega_p} J_\theta dx = \int_\Omega L[u]dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \eta}d\sigma$$

por consiguiente el modelo de Grad-Shafranov queda descrito por:

$$\left\{\begin{array}{l} L[u] = g(r,u) \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = \beta \quad \text{en} \quad \Gamma \\ I = \int_\Gamma \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \end{array}\right.$$

dónde

$$\begin{array}{l} g : \overline{\Omega} \times I\!R \to I\!R \\ \qquad (x,u) \to g(x,u) = \left\{\begin{array}{l} g(x,u), \quad u \leq 0 \\ 0, \quad u \geq 0. \end{array}\right. \end{array}$$

Simplificaremos aún más este modelo y estudiaremos el problema con $g(x,u) = \lambda u_-$ con $\lambda > 0$.

Nota 1.4.1. *a) Cuando se toma $L[u] = -\Delta u$ y la función*

$$g(x,u) = g\left(\{y \in \Omega | u(x) < u(y) < 0\}\right)$$

se tiene el modelo de Grad-Mercier.

b) Cuando se toma $L[u] = -\Delta u$ y la función $g(x,u) = \alpha\left[(u-\lambda)_+\right]^{\frac{3}{2}}$ se tiene el modelo de Thomas-Fermi para átomos intermedios.

1.4.2. Modelo del plasma simplificado

Seguimos la exposición de Friedman en [19]. Sea Ω un dominio acotado de $I\!R^N$, $N \geq 3$, con frontera regular, $\Gamma \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ y λ un número real positivo. Consideramos el problema

$$(P) \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta u - \lambda u_- = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = c \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \\ I = \int_\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma > 0 \end{array}\right. \tag{1.9}$$

las incógnitas son (u,c) (o bien (u,Γ_p)) y η denota la normal exterior a la frontera del dominio. Se definen los conjuntos

$$\begin{array}{ll} \Omega_p & = \{x \in \Omega | u(x) < 0\} \\ \Omega_v & = \{x \in \Omega | u(x) > 0\} \\ \Gamma_p & = \partial\Omega_p \quad \text{la frontera libre.} \end{array}$$

El primer paso para la resolución del problema es la determinación de c, que como veremos depende de la posición relativa de λ respecto a λ_1, primer autovalor del laplaciano con datos Dirichlet en Ω.

Sea λ_1 el primer autovalor del laplaciano en Ω y v_1 la autofunción positiva asociada. La fórmula de Green permite escribir para cualquier subconjunto regular G de Ω

$$\int_G \left[(\lambda - \lambda_1) v_1 u_- + \lambda_1 v_1 u_+\right] dx = \int_G (v_1 \Delta u - u \Delta v_1)\, dx = \int_{\partial G} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) d\sigma. \tag{1.10}$$

Caso 1 *Si $\lambda > \lambda_1$, entonces se tiene que $c > 0$*; en efecto, supongamos que $\lambda > \lambda_1$ y tomemos en (1.10), $G = \Omega$, entonces

$$0 < \int_{\Omega} \{(\lambda - \lambda_1)u_- v_1 + \lambda_1 v_1 u_+\}\, dx = -c \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} d\sigma$$

y como por el lema de Hopf $\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta} < 0$, se tiene $c > 0$.

Caso 2 *Si $\lambda < \lambda_1$, entonces $c < 0$*. Si fuese $c > 0$, tomando en (1.10) $G = \Omega_p$ se tiene

$$0 > \int_{\Omega_p} (\lambda - \lambda_1) v_1 u_- dx = \int_{\partial\Omega_p} v_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma$$

como $u < 0$ en Ω_p por el lema de Hopf resulta $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} > 0$, y $v_1 > 0$ en $\partial\Omega_p$ obtenemos una contradicción.

Tampoco puede ser que $\lambda < \lambda_1$ y $c = 0$; obtenemos una contradicción de nuevo tomando $\Omega = \Omega_p$, pues de (1.10) y $c = 0$ se infiere que $\lambda = \lambda_1$.

El segundo paso es establecer la formulación variacional. Tomamos

$$\mathcal{K} = \left\{ \rho \in L^2(\Omega) |\, \rho \geq 0 \quad \text{a.e.} \quad \int_{\Omega} \rho(x) dx = I \right\}$$

$\mathcal{K}$ es un subconjunto convexo cerrado y no vacío de $L^2(\Omega)$. Sea $G(x, y)$ la función de Green para el problema de Dirichlet para el laplaciano en Ω y definamos

$$J(\rho) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} \rho^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) \rho(x) \rho(y) dx dy.$$

De esta forma se obtiene

$$J'(\rho) = \frac{1}{\lambda} \rho(x) - \int_{\Omega} \int_{\Omega} G(x, y) \rho(y) dy.$$

Nota 1.4.2. *Observamos que si ponemos $\rho = \lambda u_-$ tenemos*

$$u(x) = -\int_{\Omega} G(x, y) \rho(y) dy + c$$

y formalmente

$$J(\rho) = F(u) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} u u_- - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_- \Delta u dx.$$

Además

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \int_{\partial\Omega} \Delta u d\sigma(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dx = I$$

Consideramos el problema variacional de hallar $\rho \in \mathcal{K}$ tal que

$$J(\rho) = \min_{\zeta \in \mathcal{K}} J(\zeta).$$

Para poder usar los resultados abstractos del apartado anterior tendremos que verificar que J es d.s.c.i. y que es coercivo en $\mathcal{K}$.

Teniendo en cuenta que $N \geq 3$, tenemos $0 \leq G(x,y) \leq \dfrac{C}{|x-y|^{N-2}}$ y entonces

$$\left\| \int_\Omega G(x,y)\rho(y)dy \right\|_r \leq c\|\rho\|_p \quad \text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p} = 1 + \dfrac{1}{r} \\ 1 \leq s < \dfrac{N}{N-2} \end{array} \right.$$

(Véase por ejemplo [23]). Para $p = 2$ y $r > 2$, se tiene que tomando r' el conjugado

$$\left| \int_\Omega \int_\Omega G(x,y)\rho(y)\rho(x)dydx \right| < C\|\rho\|_2\|\rho\|_{r'},$$

si $\dfrac{1}{r'} = \dfrac{\theta}{1} + \dfrac{1-\theta}{2}$ resulta,

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{r'} &= \left(\int_\Omega \rho^{r'}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}} = \left(\int_\Omega \rho^{\theta r' + (1-\theta)r'}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\leq \left(\left(\int_\Omega \rho\, dx\right)^{\theta r'} \left(\int_\Omega \rho^2\, dx\right)^{\frac{(1-\theta)r'}{2}} \right)^{\frac{1}{r'}} \equiv \|\rho\|^{\theta}_{L^1(\Omega)} \|\rho\|^{(1-\theta)}_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Es decir, por la desigualdad de Young,

$$\left| \int_\Omega \int_\Omega G(x,y)\rho(y)\rho(x)\, dydx \right| \leq CI^\theta \|\rho\|_2^{2-\theta} = CI^\theta \left(\int_\Omega \rho^2\, dx \right)^{1-\frac{\theta}{2}}$$

$$\leq \frac{CI^\theta \varepsilon^{\frac{1}{1-\frac{\theta}{2}}}}{\varepsilon^{1-\frac{\theta}{2}}} \left(\int_\Omega \rho^2\, dx \right)^{1-\frac{\theta}{2}} \leq \varepsilon \int_\Omega \rho^2\, dx + \left(\frac{C}{\varepsilon} I^\theta \right)^\alpha$$

y como consecuencia

$$J(\rho) \geq \alpha \int_\Omega \rho^2\, dx - C,$$

es decir, es coercivo y, en particular, es acotado inferiormente en $\mathcal{K}$. Ahora basta observar que como la norma es d.c.s.i si $\rho_k \rightharpoonup \rho$ débilmente en L^2 el primer sumando de la expresión anterior es d.s.c.i. , pero usando la compacidad del operador de Green obtenemos $G(\rho_k) \to G(\rho)$ fuertemente en L^2 por tanto

$$\int_\Omega \int_\Omega G(x,y)\rho_k(y)\rho_k(x)\, dydx \to \int_\Omega \int_\Omega G(x,y)\rho(y)\rho(x)\, dydx$$

y como consecuencia podemos aplicar el teorema abstracto para concluir que existe un $\rho \in \mathcal{K}$ tal que

$$J(\rho) = \inf_{\eta \in \mathcal{K}} J(\eta).$$

No obstante no podemos concluir la unicidad directamente por que el funcional $\mathbf{J}$ no es, es general, convexo.

Sea ρ la solución del problema variacional. Queremos ver en que sentido hemos resuelto el problema (P). Si ρ es una solución del problema variacional:

i) $\rho > 0$ en un conjunto de medida positiva, ya que

$$\int_\Omega \rho(x)\,dx = I > 0.$$

ii) Fijo $\delta_0 > 0$ de forma que $E_{\delta_0} = \{x : \rho(x) > \delta_0\}$ verifique $|E_{\delta_0}| > 0$, elegimos η_0 con soporte en E_{δ_0} de forma que

$$\int_\Omega \eta_0\,dx = 1.$$

Dados $\delta > 0$ y $\eta \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ verificando $\eta(x) > 0$ si $x \in \{x : \rho(x) < \delta\}$ consideramos

$$\rho_t(x) = \rho(x) + t\left(\eta - \left(\int_\Omega \eta\right)\eta_0\right)$$

para t suficientemente pequeño tenemos que $\rho_t \in \mathcal{K}$ por tanto

$$\frac{d}{dt}J(\rho_t)\Big|_{t=0^+} \geq 0$$

pero entonces

$$0 \leq \left\langle J'(\rho), \eta - \left(\textstyle\int \eta\right)\eta_0 \right\rangle = \textstyle\int_\Omega J'(\rho)\left(\eta - \left(\int \eta\right)\eta_0\right)\,dx =$$

$$\textstyle\int_\Omega J'(\rho)\eta - \int_\Omega J'(\rho)\eta_0 \int_\Omega \eta = \int_\Omega \left(J'(\rho) - \int_\Omega J'(\rho)\eta_0\,dy\right)\eta\,dx$$

como δ y η son arbitrarios, tomando $c = -\int J'(\rho)\eta_0\,dx$ tenemos:

a) $J'(\rho) \geq -c$ en $\rho \equiv 0$ $(\eta > 0)$.

b) $J'(\rho) = -c$ en $\rho > 0$.

c) Si hacemos $u(x) = -\int_\Omega G(x,y)\rho(y)\,dy + c$ como tenemos $J'(\rho) = -\int_\Omega G(x,y)\rho(y)\,dy + \dfrac{1}{\lambda}\rho$ entonces

$$J'(\rho) = u(x) - c + \frac{1}{\lambda}\rho$$

(Véase [5] para más detalles).

Por *b*), en $\rho > 0$ sabemos que $J'(\rho) = -c$, entonces $u(x) - c + \dfrac{1}{\lambda}\rho(x) = -c$ es decir, $u(x) = \dfrac{1}{\lambda}\rho(x)$ si $\rho > 0$. Escribiendo $\lambda u_- = \rho$ y aplicando Δ en c) resulta en sentido débil,

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \lambda u_-(x) \\ u|_{\partial\Omega} = c \end{cases}$$

y con esto hemos resuelto el problema simplificado del plasma.

Además probaremos el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 1.4.3. *Siendo λ_2 el segundo autovalor del laplaciano, si $\lambda < \lambda_2$, entonces (P) tiene solución única.*

Demostración. Supongamos que existan dos soluciones (u_1, c_1) y (u_2, c_2) de (1.9). Como el signo de c_i sólo depende de la ordenación entre λ y λ_1 y λ es fijo, tenemos sign $c_1 =$ sign c_2. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda > \lambda_1$ (o equivalentemente que $c_1, c_2 > 0$) Consideremos $U_i = \dfrac{u_i}{c_i}$ y definamos

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad U_1 = U_2 \\ -\dfrac{(U_1)_- - (U_2)_-}{U_1 - U_2} & \text{si} \quad U_1 \neq U_2 \end{cases}$$

Se tiene claramente que $0 \leq h(x) \leq 1$. La función $U = U_1 - U_2$ verifica el problema

$$\begin{cases} -\Delta U = \lambda h(x) U \\ U|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Así tenemos que $U \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ al menos.

Probaremos que el signo de U es constante en Ω. Si no fuera así consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_1 = &\quad \{x \in \Omega \,:\, U > 0\} \\ \Omega_2 = &\quad \{x \in \Omega \,:\, U < 0\}. \end{aligned}$$

Ambos son abiertos (por continuidad). Sea v_1 la autofunción positiva del primer autovalor para el laplaciano en Ω. Existe un $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma \int_{\Omega_1} v_1 U + \int_{\Omega_2} v_1 U = 0$$

o equivalentemente, la función

$$\overline{U} = \begin{cases} \gamma U & \text{en} \quad \Omega_1 \\ 0 & \text{en} \quad \Omega - (\Omega_1 \cup \Omega_2) \\ U & \text{en} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

se anula en las fronteras de Ω_1 y Ω_2 y verifica $\overline{U} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ y $\overline{U} \perp v_1$ en $L^2(\Omega)$. Por definición del segundo autovalor

$$\lambda_2 = \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega), \int vv_1 = 0} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}{\int_\Omega v^2 \, dx} \leq \frac{\int_\Omega \left|\nabla \overline{U}\right|^2 \, dx}{\int_\Omega \overline{U}^2 \, dx} \leq \frac{\int_\Omega \left|\nabla \overline{U}\right|^2 \, dx}{\int_\Omega h(x) \overline{U}^2 \, dx} \tag{1.11}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_1} h\overline{U}^2 \, dx &= \gamma^2 \int_{\Omega_1} \lambda h U U \, dx = -\gamma^2 \int_{\Omega_1} U \Delta U \, dx \\ &= \gamma^2 \int_{\Omega_1} |\nabla U|^2 \, dx = \int_{\Omega_1} \left|\nabla \overline{U}\right|^2 \, dx \end{aligned}$$

análogamente

$$\lambda \int_{\Omega_2} h\overline{U}^2 \, dx = \int_{\Omega_2} \left|\nabla \overline{U}\right|^2 \, dx$$

Por tanto

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega_2} \left|\nabla \overline{U}\right|^2 \, dx}{\int_{\Omega_2} h(x)\overline{U}^2 \, dx}$$

que sustituyendo en (1.11) da que $\lambda \geq \lambda_2$ en contradicción con la hipótesis $\lambda_2 > \lambda$.

Entonces podemos suponer, por ejemplo,que $U_1 \geq U_2$. Si fuese $U_1 \neq U_2$, poniendo $D_1 = \{x \in \Omega | U_1(x) < 0\}$, $D_2 = \{x \in \Omega | U_2(x) < 0\}$, se tiene $D_1 \subset D_2$ en sentido estricto (en caso contrario podriamos tomar los subconjuntos donde son positivas). De esta forma se tiene que

$$-\Delta U_1 = \lambda U_1, \text{ en } D_1, \; U_1|_{\partial D_1} = 0$$

y

$$-\Delta U_2 = \lambda U_2, \text{ en } D_2, \; U_2|_{\partial D_2} = 0,$$

Es decir, siendo D_1 y D_2 dominios estrictamente ordenados, el problema de Dirichlet tendría como autovalor principal

$$\lambda_1(D_1) = \lambda = \lambda_1(D_2),$$

en contradicción con el hecho de que debe ser $\lambda_1(D_1) > \lambda_1(D_2)$. Esta contradicción muestra el resultado de unicidad. ∎

Capítulo 2

Semicontinuidad inferior débil y convexidad

En las aplicaciones de los *Métodos Directos del Cálculo de Variaciones* la dificultad que aparece en primer término es probar la semicontinuidad inferior débil. Salvo los casos de funcionales convexos estudiados en el marco abstracto esta tarea no suele ser inmediata.

En este capítulo vamos a estudiar funcionales del tipo

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx.$$

Las hipótesis con las que trabajaremos son las siguientes.

$(F1)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio abierto acotado con frontera regular (será suficiente que $\partial\Omega$ sea lipschitz, pero el lector puede comenzar pensando en fronteras indefinidamentes diferenciables).

$(F2)$ $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(F3)$ f *es una función de Caratheodory*, es decir,

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. f es continua en $(u, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ en casi todo $x \in \Omega$
2. f es medible como función de x en todo $(u, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$

$(F4)$ $|f(x, u, p)| \leq a(x, |u|, |p|)$ donde a es creciente en $|u|, |p|$ y localmente integrable en x para $|u|, |p|$ en conjuntos acotados.

Dada f en las hipótesis anteriores consideramos el funcional asociado

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx, \ u \in W_0^{1,\infty}(\Omega).$$

El espacio donde se define I depende del crecimiento de f para $|u|$ y $|p|$ grandes.

A la vista de las hipótesis queda claro que no se estudiará más que el caso escalar. Para una introducción al caso vectorial, es decir, u con valores en $\mathbb{R}^m$, véase [10].

Hay algunas observaciones inmediatas que hacer:

1) Si $f(x,u,p) \equiv f(x,p)$ y es convexa respecto a p, entonces el funcional $I(u)$ es convexo en $W_0^{1,\infty}(\Omega)$.

2) Si f depende también de la funcion, u, entonces la convexidad de f respecto a p no implica la convexidad de $I(u)$, por ejemplo, considérese $f(x,u,p) = \dfrac{1}{2}|p|^2 - u^2$

3) Si $I(u)$ está definido en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y es debilmente inferiormente semicontinuo en $W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, entonces es debilmente-* inferiormente semicontinuo en $W_0^{1,\infty}(\Omega)$. (Si $u_k \rightharpoonup u$ debilmente-* en $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ entonces converge debilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$.)

En este capítulo estudiamos condiciones necesarias para la semicontinuidad inferior débil y el teorema clásico de Tonelli-De Giorgi que da condiciones suficientes.

2.1. Condición necesaria para la semicontinuidad inferior débil

El resultado fundamental de esta sección es el teorema siguiente.

Teorema 2.1.1. *Supongamos que se cumplen* $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$. *Sea*

$$I(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)dx$$

débilmente semicontinuo inferiormente en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Entonces $f(x,u,\bullet)$ *es convexa.*

Para demostrar el teorema anterior necesitaremos los lemas siguientes.

Lema 2.1.2. *(Riemann-Lebesgue) Sea* $Q = [0,T]^N$ *un cubo en* $\mathbb{R}^N$ *y sea* f *función* T*-periódica en* $\mathbb{R}^N$ *tal que* $f \in L^p(Q)$ *para algún* $1 \le p < \infty$.

Se define $f_n(x) = f(nx)$. *Entonces*

$$f_n \rightharpoonup \bar{f} = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx, \ \text{débilmente en } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \ \text{cuando } n \to \infty$$

Demostración. Es claro que como se trata de un resultado local basta considerar la convergencia débil en $\Omega = mQ$, es decir, una dilatación del cubo básico.

Establecemos la estimación fundamental; sea $f \in L^p(Q)$ y $n \in \mathbb{R}^+$ entonces con un cambio de variable y la periodicidad de f

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |f_n(x)|^p dx = \int_\Omega |f(nx)|^p dx = \\
&(\frac{1}{n})^N \int_{mnQ} |f(y)|^p dy \le (\frac{1}{n})^N([mn]+1)^N |Q| \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p dy \le \\
&c(m,N,Q)\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^p dy,
\end{aligned}$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x. Elegimos un polinomio trigonométrico $z(x)$ tal que

1. $\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy = \frac{1}{|Q|}\int_Q z(y)dy$
2. $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - z(y)|^p dy < \delta$,

tal polinomio existe por el Teorema de Fejer y la densidad de las funciones continuas en L^p.

Entonces para $n > 1$ se tiene

$$\int_Q |f(ny) - z(ny)|^p dy < c(m, N, Q)\delta$$

y el resultado se concluye ya que para los polinomios trigonométricos se verifica el resultado clásico de Riemann-Lebesgue. ■

Lema 2.1.3. *(Mc Shane) Sea X espacio normado y sea $Y \subset X$. Supongamos que*

$$h : Y \longrightarrow I\!R$$

es una función lipschitz sobre Y con constante κ. Entonces existe

$$H : X \longrightarrow I\!R$$

tal que: $i)$ H es una extensión de h, $H|_Y = h$; $ii)$ H es lipschitz con la misma constante κ.

Demostración. Para $x \in X$ definimos

$$H(x) = \sup\{f(y) - \kappa||x - y|| \, : \, y \in Y\}.$$

Es claro que H verifica $i)$. Probamos $ii)$ dados $x_1, x_2 \in X$, supongamos sin pérdida de generalidad que $0 \leq H(x_1) - H(x_2)$, entonces,

$$\begin{array}{l} 0 \leq H(x_1) - H(x_2) = \\ \sup\{h(y) - \kappa||x_1 - y|| \, : \, y \in Y\} - \sup\{h(y) - \kappa||x_2 - y|| \, : \, y \in Y\} \leq \\ \sup\{h(y) - \kappa||x_1 - y|| - (h(y) - \kappa||x_2 - y||) \, : \, y \in Y\} = \\ \sup\{\kappa||x_2 - y|| - \kappa||x_1 - y|| \, : \, y \in Y\} \leq \kappa||x_2 - x_1|| \end{array}$$

■

Lema 2.1.4. *Si Ω, f e I satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1.1, entonces*

$$\frac{1}{|D|}\int_D f(x_0, u_0, p_0 + \nabla\phi(y))dy \geq f(x_0, u_0, p_0) \tag{2.1}$$

para todo $D \subset \Omega$ cubo, para todo $(x_0, u_0, p_0) \in \Omega \times I\!R \times I\!R^N$ y para todo $\phi \in W_0^{1,p}(D)$

Demostración. Haremos la demostración en el caso en que f no depende de x ni u, el caso general puede verse por ejemplo en el citado libro de Dacorogna, [10], pag. 69.

Sea $D \subset \Omega$ un cubo y sea $p_0 \in I\!R^N$. Sea $\phi \in W_0^{1,p}(D)$. Extendemos ϕ periódicamente a $I\!R^N$ y consideramos

$$\phi_k(x) = \frac{1}{k}\phi(kx), \ k > 1.$$

Por el Lemma de Riemann-Lebesgue se tiene que : $a)$ $\phi_k \rightharpoonup 0$ débilmente en L^p y $b)$ $\nabla\phi_k \rightharpoonup 0$ débilmente en L^p, pues

$$\int_D \nabla\phi = 0, \text{ por ser } \phi \in W_0^{1,\infty}(D).$$

Definimos la función afín $u_\infty(x) = \langle p_0, x\rangle$ y

$$u_k = \begin{cases} u_\infty(x), \ x \in \Omega - D \\ u_\infty(x) + \phi_k(x), \ x \in D \end{cases}$$

de forma que

$$\nabla u_k = \begin{cases} p_0, \ x \in \Omega - D \\ p_0 + \nabla\phi(kx), \ x \in D \end{cases}$$

Entonces es claro que $u_k \rightharpoonup u_\infty$ débilmente en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por periodicidad se tiene,

$$\begin{aligned} &I(u_k) = \int_\Omega f(\nabla u_k)dx = \int_{\Omega-D} f(p_0) + \int_D f(p_0 + \nabla\phi(kx))dx = \\ &f(p_0)|\Omega - D| + \frac{1}{k^N}\int_{kD} f(p_0 + \nabla\phi(x))dx = \\ &f(p_0)|\Omega - D| + \int_D f(p_0 + \nabla\phi(x))dx. \end{aligned}$$

Como por hipótesis I es débilmente inferiormente semicontinuo en $W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_k) = f(p_0)|\Omega - D| + \int_D f(p_0 + \nabla\phi(x))dx \geq I(u_\infty) = f(p_0)|\Omega|.$$

Despejando en la anterior desigualdad se tiene,

$$\frac{1}{|D|}\int_D f(p_0 + \nabla\phi(y))dy \geq f(p_0)$$

∎

Nota 2.1.5. *La condición (2.1) se conoce en la literatura como quasiconvexidad y juega un papel esencial en el estudio de problemas con valores vectoriales*

Demostración del Teorema.-
Queremos probar que si $(x_0, u_0, \alpha), (x_0, u_0, \beta) \in \Omega \times I\!R \times I\!R^N$, para todo $0 < \lambda < 1$ se verifica que

$$f(x_0, u_0, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \leq \lambda f(x_0, u_0, \alpha) + (1-\lambda)f(x_0, u_0, \beta).$$

La idea es considerar en el Lema 2.1.4 funciones ϕ cuyo gradiente valga esencialmente α y β.

Etapa 1.- Consideramos $D = (a,b)^N \subset \Omega$, $k \in I\!N$ y $0 < \lambda < 1$. Dividimos el intervalo (a,b) en 2^k subintervalos iguales, $\{J_i\}_{i=1,\ldots,2^k}$, de longitud $\dfrac{b-a}{2^k}$.

Cada intervalo J_i lo subdividimos a su vez en dos subintervalos,

$$J_i^1, \text{ de longitud } \lambda |J_i| = \lambda \frac{b-a}{2^k} \text{ y}$$

$$J_i^2, \text{ de longitud } (1-\lambda)|J_i| = (1-\lambda)\frac{b-a}{2^k}.$$

Llamando

$$I_k^1 = \bigcup_{i=1}^{2^k} J_i^1, \; I_k^2 = \bigcup_{i=1}^{2^k} J_i^2,$$

se tiene que

$$|I_k^1| = \lambda(b-a) \text{ y } |I_k^2| = (1-\lambda)(b-a).$$

Tomamos

$$D_1^k = I_k^1 \times (a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k})^{N-1}$$

$$D_2^k = I_k^2 \times (a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k})^{N-1}.$$

Fijado $k \in I\!N$ definimos

$$\phi : D_1^k \bigcup D_2^k \longrightarrow I\!R$$

como sigue:

i) ϕ continua, $\phi(a, x_2, \ldots x_N) = 0 = \phi(b, x_2, \ldots x_N)$

ii)

$$\nabla\phi(x) = \begin{cases} (1-\lambda)(\alpha-\beta), \text{ si } x \in D_1^k \\ -\lambda(\alpha-\beta), \text{ si } x \in D_2^k. \end{cases}$$

De esta forma ϕ es lipschitz en $D_1^k \bigcup D_2^k$ con constante $L \leq |\alpha - \beta|$, es decir acotada superiormente independientemente de k; además $|\phi(x)| \leq \dfrac{\kappa}{2^k}$ si $x \in D_1^k \bigcup D_2^k$. Definimos ahora $\phi(x) = 0$ si $x \in \partial D$ con lo que ϕ resulta lipschitz sobre $D_1^k \bigcup D_2^k \bigcup \partial D$ con costante L. Aplicando el Lema de Mc Shane extendemos ϕ a todo D con la misma constante L. De esta forma obtenemos $\phi \in W_0^{1,\infty}(D)$ tal que

$$||\nabla\phi||_\infty \leq L, \text{ independientemente de } k.$$

Obsérvese que

$$\nabla\phi(x) = \begin{cases} (1-\lambda)(\alpha-\beta), \text{ si } x \in D_1^k, \text{ y } |D_1^k| = \lambda(b-a)(b-a-\dfrac{2}{k})^{N+1} \\ -\lambda(\alpha-\beta), \text{ si } x \in D_2^k,, \text{ y } |D_1^k| = \lambda(b-a)(b-a-\dfrac{2}{k})^{N+1} \end{cases}$$

Etapa 2 .- Por el lema 2.1.4 tenemos

$$\frac{1}{|D|}\int_D f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta+\nabla\phi(x))dx \geq f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta) \tag{2.2}$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\int_D f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta+\nabla\phi(x))dx = \\
&\int_{D_1^k} f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta+(1-\lambda)(\alpha-\beta))dx+ \\
&\int_{D_2^k} f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta-\lambda(\alpha-\beta))dx+ \\
&\int_{D-(D_1^k\cup D_2^k)} f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta+\nabla\phi(x))dx = \\
&f(x_0,u_0,\alpha)|D_1^k| + f(x_0,u_0,\beta)|D_2^k|+ \\
&\int_{D-(D_1^k\cup D_2^k)} f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta+\nabla\phi(x))dx.
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\lim_{k\to\infty}\int_D f(x_0,u_0,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta+\nabla\phi(x))dx = |D|\lambda f(x_0,u_0,\alpha)+|D|(1-\lambda)f(x_0,u_0,\beta)$$

que junto a (2.2) da el resultado.

■

2.2. Condición suficiente para la semicontinuidad inferior débil

En esta sección presentamos el resultado clásico que en una dimensión estableció Tonelli, [42], y fue extendido a más dimensiones por De Giorgi, [11]. Otras contribuciones son debidas a Serrin, Morrey, Ekeland-Teman entre otros muchos.

La demostración que sigue es la dada por De Giorgi. Pasamos a enunciar el resultado.

Teorema 2.2.1. *Sea $\Omega\subset I\!R^N$ dominio acotado. Sean $p\geq 1$, $q\geq 1$ y*

$$f:\Omega\times I\!R\times I\!R^N \longrightarrow \bar{I\!R}$$

función de Caratheodory satisfaciendo:

(f1) $f(x,u,\bullet)$ es convexa.

(f2) Existen $a\in[L^{q'}(\Omega)]^N$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, y $b\in L^1(\Omega)$ tales que

$$f(x,u,\xi)\geq\langle a(x),\xi\rangle+b(x),\ \textit{para casi todo}\ (u,\xi)\in I\!R\times I\!R^N$$

Considerando el funcional asociado a f,

$$J(u,\xi) = \int_\Omega f(x,u,\xi(x))dx,$$

entonces si

(a) $u_k \rightharpoonup u_\infty$ *fuertemente* $L^p(\Omega)$.

(b) $\xi_k \rightharpoonup \xi_\infty$ *débilmente en* $[L^q(\Omega)]^N$,

se verifica

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k,\xi_k) \geq J(u_\infty,\xi_\infty)$$

Nota 2.2.2. *1. El resultado es cierto también en el caso de ser* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

2. *En las aplicaciones al Cálculo de Variaciones* $\xi \equiv \nabla u$. *En este caso se obtiene semicontinuidad débil en* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *para*

$$I(u) \equiv J(u,\nabla u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)dx.$$

Además en este caso, siendo el dominio acotado y suponiendo convergencia débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$, *la convergencia de* $\{u_k\}$ *se obtiene mediante el teorema de compacidad de Rellich.*

La demostración utiliza los lemas siguientes.

Lema 2.2.3. *(Scorza-Dragoni) Sea* Ω *un conjunto medible con medida finita,* $|\Omega| < \infty$, *sea* $S \subset \mathbb{R}^p$ *y sea*

$$h : \Omega \times S \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que; i) $h(\bullet, y)$ *es medible para todo* $y \in S$; *ii)* $h(x,\bullet)$ *es uniformemente continua para casi todo* $x \in \Omega$.

Entonces, para todo $\delta > 0$, *existe un compacto* $K \subset \Omega$ *con* $|\Omega - K| < \delta$ *y tal que la restricción de* h *a* $K \times S$ *es continua.*

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos

$$\omega_n(x) = \sup_{y_1,y_2\in S,\ |y_1-y_2|<\frac{1}{n}} |h(x,y_1) - h(x,y_2)|$$

por hipótesis $\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$; aplicando el Teorema de Egorov existe un compacto $K_1 \subset \Omega$, $|\Omega - K_1| < \dfrac{\delta}{2}$ y tal que $\{\omega_n\}$ converge uniformemente en K_1. Como consecuencia $h(x,\bullet)$ es una familia equicontinua cuando nos restringimos a K_1.

Sea $\Sigma \subset S$ un subconjunto denso y numerable; escribamos $\Sigma = \{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y consideremos una sucesión de números reales positivos $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{j=1}^\infty \delta_j = \delta/2$.

Por el Teorema de Luzin para cada j existe un compacto $C_j \subset \Omega$ tal que $|\Omega - C_j| < \delta_j$ y $h(\bullet, y_j)$ es continua en C_j.

Ponemos $K_2 = \cap_{j=1}^{\infty} C_j$, entonces $h(\bullet, y_j)$ es continua en K_2 para todo $j \in I\!N$ y $|\Omega - K_2| < \delta/2$.

Definiendo $K = K_1 \cap K_2$, sea una sucesión $\{(x_k, y_k)\} \subset K \times S$ tal que $x_k \to x \in K$, $y_k \to y \in S$. Entonces

$$|h(x_k, y_k) - h(x, y)| \le |h(x_k, y_k) - h(x_k, y)| + |h(x_k, y) - h(x, y)|,$$

el primer sumando tiende a cero pues las funciones $h(x, \bullet)$ son equicontinuas en K. Para el segundo sumando observamos que dada la equicontinuidad $h(x, \bullet)$, podemos elegir $z \in \Sigma$ de forma que para todo $x \in K$, $|h(x, y) - h(x, z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; entonces

$$|h(x_k, y) - h(x, y)| \le |h(x_k, y) - h(x_k, z)| + |h(x_k, z) - h(x, z)| + |h(x, z) - h(x, y)|.$$

Se tiene, $|h(x_k, y) - h(x_k, z)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|h(x, z) - h(x, y)| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} |h(x_k, z) - h(x, z)| = 0$. Como conclusión

$$\limsup_{k\to\infty} |h(x_k, y_k) - h(x, y)| \le \varepsilon$$

y se sigue la conclusión. ■

(Véase [11].) Obsérvese que se trata de una extensión del Teorema de Luzin.

Lema 2.2.4. *En las hipotesis del Teorema 2.2.1 sea una subsucesión (u_k, ξ_k) tal que*

$$L = \liminf_{k\to\infty} J(u_k, \xi_k).$$

Si $L < \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$:

1. *Existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tal que, $|\Omega - \Omega_\varepsilon| < \varepsilon$*
2. *Existe $\nu(\varepsilon)$ y una subsucesión, $\{k_j\}$, tal que si $k_j \ge \nu(\varepsilon)$,*

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f(x, u_{k_j}(x), \xi_{k_j}(x)) - f(x, u_\infty(x), \xi_{k_j}(x))| dx < \varepsilon |\Omega|$$

Demostración. Puesto que

$$\begin{array}{l} u_k \to u_\infty, \text{ fuertemente en } L^p(\Omega) \\ \xi_k \rightharpoonup \xi_\infty, \text{ débilmente en } L^q(\Omega), \end{array}$$

dado $\lambda > 0$, tenemos las desigualdades,

$$|\{x \in \Omega \,:\, |u_k(x)| \ge \lambda\}| \le \frac{||u_k||_p^p}{\lambda^p},$$

$$|\{x \in \Omega \,:\, |u_\infty(x)| \ge \lambda\}| \le \frac{||u_\infty||_p^p}{\lambda^p},$$

$$|\{x \in \Omega \,:\, |\xi_k(x)| \ge \lambda\}| \le \frac{||\xi_k||_q^q}{\lambda^q}.$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ tal que si,

$$K^1_{\varepsilon,k} = \{x \in \Omega \,:\, |u_k(x)| > M_\varepsilon,\ |u_\infty(x)| > M_\varepsilon\}$$

$$K^2_{\varepsilon,k} = \{x \in \Omega \,:\, |\xi_k(x)| > M_\varepsilon\}$$

se verifica

$$|K^1_{\varepsilon,k}| \leq \frac{\varepsilon}{6},\ \ |K^2_{\varepsilon,k}| \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Tomando

$$\Omega^1_{\varepsilon,k} = \Omega - (K^1_{\varepsilon,k} \cup K^2_{\varepsilon,k})$$

se tiene

$$|\Omega - \Omega^1_{\varepsilon,k}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por el Lema de Scorza-Dragoni existe $\Omega^2_{\varepsilon,k} \subset \Omega^1_{\varepsilon,k}$, compacto, $|\Omega^1_{\varepsilon,k} - \Omega^2_{\varepsilon,k}| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, y tal que si $|u| < M_\varepsilon$ y $|\xi| < M_\varepsilon$, $f(\bullet, u, \xi)$ es continua en $\Omega^2_{\varepsilon,k}$.

Fijado ε, sea $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|u(x) - v(x)| < \delta$ entonces

$$|f(x, u(x), \xi) - f(x, v(x), \xi)| < \varepsilon, \ \ \text{para todo } x \in \Omega^2_{\varepsilon,k}, \ \ \text{y } |u|, |v|, |\xi| < M_\varepsilon.$$

Fijado $\delta > 0$ y puesto que $u_k \to u_\infty$ en L^p, existe $\nu(\varepsilon)$ tal que si

$$\Omega^3_{\varepsilon,k} = \{x \in \Omega \,:\, |u_k(x) - u_\infty(x)| < \delta\}$$

entonces

$$|\Omega - \Omega^3_{\varepsilon,k}| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ \text{para } k > \nu(\varepsilon).$$

Definiendo $\Omega_{\varepsilon,k} = \Omega^3_{\varepsilon,k} \cap \Omega^2_{\varepsilon,k}$ tenemos,

$$\begin{cases} |\Omega - \Omega_{\varepsilon,k}| < \varepsilon, \ \text{pues} \\[2ex] |\Omega - \Omega_{\varepsilon,k}| < |\Omega - \Omega^2_{\varepsilon.k}| + |\Omega - \Omega^3_{\varepsilon.k}| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3}, \\[2ex] \int_{\Omega_{\varepsilon,k}} |f(x, u_k(x), \xi_k(x)) - f(x, u_\infty(x), \xi_k(x))| dx < \varepsilon |\Omega| \end{cases}$$

Haciendo la construcción anterior para $\varepsilon_j = \dfrac{\varepsilon}{2^j}$; tomando el correspondiente ν_j, una subsucesión con $k_j > \nu_j$ y $\lim\limits_{k\to\infty} k_j = \infty$ y si definimos

$$\Omega_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_{\varepsilon, k_j},$$

tenemos

$$\begin{cases} |\Omega - \Omega_\varepsilon| < \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon, \\[2ex] \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x, u_k(x), \xi_k(x)) - f(x, u_\infty(x), \xi_k(x))| dx < \varepsilon |\Omega| \end{cases}$$

como queríamos probar. ■

Demostración del Teorema.-

Reemplazando si es preciso $f(x,u,\xi)$ por $f(x,u,\xi) - \langle a(x),\xi\rangle - b(x)$, podemos suponer que $f \geq 0$. (Obsérvese que $\langle a(x),\xi\rangle - b(x)$ es débilmente continuo por hipótesis.)

Si $L = \liminf_{k\to\infty} J(u_k,\xi_k)$ entonces $L \geq 0$ pues $f \geq 0$. Supondremos que $L < \infty$ pues en otro caso no hay nada que probar. Elegimos una subsucesión $\{(u_k,\xi_k)\}$ tal que $L = \lim_{k\to\infty} J(u_k,\xi_k)$. Por el Lema 2.2.4 dado $\varepsilon > 0$ existen $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\nu(\varepsilon) \in I\!N$ y una subsucesión $\{k_j\}$, $k_j > \nu(\varepsilon)$, tales que

$$\begin{cases} |\Omega - \Omega_\varepsilon| < \varepsilon, \\ \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u_{k_j}(x),\xi_{k_j}(x)) - f(x,u_\infty(x),\xi_{k_j}(x))|dx < \varepsilon|\Omega|. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sea $\chi_\varepsilon(x)$ la función característica de Ω_ε y sea $g(x,\xi) = \chi_\varepsilon(x) f(x,u_\infty(x),\xi)$. De esta forma

$$g : \Omega \times I\!R^N \longrightarrow \bar{I\!R}$$

es una función de Caratheodory y $g(x,\bullet)$ es convexa para casi todo $x \in \Omega$.

Tenemos entonces que

$$\mathcal{G}(\xi) = \int_\Omega g(x,\xi(x))dx$$

es convexa y semicontinua inferiormente en $[L^q(\Omega)]^N$, pues si $\xi_k \to \xi$ fuertemente en $[L^q(\Omega)]^N$ para alguna subsucesión se tiene convergencia puntual, por lo que basta aplicar el teorema de Fatou. Como consecuencia, en virtud de los resultados del Capítulo 1, $\mathcal{G}$ es débilmente semicontinua inferiormente, es decir, si $\xi_{k_j} \rightharpoonup \xi_\infty$ débilmente en $[L^q(\Omega)]^N$,

$$\begin{aligned} &\liminf_{k_j\to\infty} \mathcal{G}(\xi_{k_j}) = \liminf_{k_j\to\infty} \int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x,u_\infty(x),\xi_{k_j}(x))dx \geq \\ &\int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x,u_\infty(x),\xi_\infty(x))dx = \mathcal{G}(\xi_\infty). \end{aligned}$$

Utilizando (2.3) y la positividad de f, resulta:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f(x,u_{k_j}(x),\xi_{k_j}(x))dx \geq \\ &\int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x,u_{k_j}(x),\xi_{k_j}(x))dx \geq \\ &\int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x,u_\infty(x),\xi_{k_j}(x))dx - \int_\Omega \chi_\varepsilon(x)|f(x,u_{k_j}(x),\xi_{k_j}(x)) - f(x,u_\infty(x),\xi_{k_j}(x))|dx \geq \\ &\int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x,u_\infty(x),\xi_{k_j}(x))dx - \varepsilon|\Omega|, \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_\Omega f(x,u_{k_j}(x),\xi_{k_j}(x))dx \geq \int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x,u_\infty(x),\xi_{k_j}(x))dx - \varepsilon|\Omega|.$$

Entonces,

$$L = \liminf_{k_j \to \infty} \int_\Omega f(x, u_{k_j}(x), \xi_{k_j}(x))dx \geq \int_\Omega \chi_\varepsilon(x) f(x, u_\infty(x), \xi_{k_j}(x))dx - \varepsilon|\Omega|$$

y haciendo tender $\varepsilon \to 0$ y teniendo en cuenta que $|\Omega - \Omega_\varepsilon| \to 0$ el teorema de convergencia dominada da que

$$L \geq \int_\Omega f(x, u_\infty(x), \xi_\infty(x))dx$$

■

2.3. Aplicaciones

Los resultados obtenidos anteriormente permiten establecer el siguiente resultado de minimización que tiene aplicaciones inmediatas para resolver problemas de contorno de ecuaciones en derivadas parciales.

Teorema 2.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado con frontera lisa (lipschitz). Sea*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

funcion de Caratheodory satisfaciendo,

$$f(x, u, \xi) \geq a(x) + b|\xi|^p, \quad \text{para todo } (x, u, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

donde $a \in L^1(\Omega)$, $b > 0$ y $p > 1$. Supongamos que $f(x, u, \bullet)$ es convexa.

Sea

$$J(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx \ \text{ y } u_0 \in W^{1,p}(\Omega).$$

Si para algún $u_1 \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ se verifica $J(u_1) < +\infty$, entonces existe $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$J(\bar{u}) = \min\{J(v) \mid v \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

Demostración. Como $f(x, u, \bullet)$ es convexa en virtud del Teorema 2.2.1 se tiene que J es débilmente inferiormente semicontinuo. Probaremos que J es coercivo sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, con lo cual podemos aplicar la teoría abstracta para concluir. Si $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, por hipótesis tenemos que

$$J(u) \geq \int_\Omega a(x)dx + b \int_\Omega |\nabla u|^p dx, \ \text{si } u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$$

Por la desigualdad de Poincaré ($u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$), se tiene

$$||u - u_0||_p^p \leq C||\nabla(u - u_0)||_p^p \leq K(||\nabla u||_p^p + 1),$$

donde $K = K(u_0)$ no depende de u. Es decir,

$$||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K_1(||\nabla u||^p_p + 1), \text{ si } u \in u_0 + W^{1,p}_0(\Omega),$$

y por tanto,

$$J(u) \geq \beta + \alpha ||\nabla u||^p_{W^{1,p}(\Omega)}, \ \alpha > 0,$$

es decir J es coercivo. ∎

Nota 2.3.2. *La hipótesis $J(u_1) < \infty$ se obtiene si por ejemplo*

$$f(x, u, \xi) \leq a_1(x) + b_1(|u|^q + |\xi|^p),$$

con $a_1 \in L^1(\Omega)$, $b_1 > 0$ y $1 < q < \dfrac{Np}{N-p}$, si $p < N$ y q cualquiera si $p > N$.

Se tiene la siguiente condición necesaria de mínimo.

Lema 2.3.3. *En las hipótesis del Teorema 2.3.1 si además f es derivable respecto a u y ξ y si $u_1 \in (u_0 + W^{1,p}_0(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2$ es un mínimo de J en $u_0 + W^{1,p}_0(\Omega)$, entonces se verifica*

$$\begin{cases} -div(\nabla_\xi f(x, u_1(x), \nabla u_1(x))) + f_u(x, u_1(x), \nabla u_1(x)) = 0, \ x \in \Omega \\ u = u_0 \ \textit{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

La prueba es inmediata y la omitimos. La hipótesis $u_1 \in \mathcal{C}^2$ no es ni mucho menos natural por lo que el Lema debe verse como un resultado formal.

Para establecer un resultado útil consideramos la siguientes hipótesis sobre f.

Sea $f \in \mathcal{C}^1$.

$(H1)$ Si $p > N$. Para cada $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$ se satisfacen

$$\begin{array}{l} |\nabla_\xi f| \leq a_1(x) + b(1 + |\xi|^{p-1}) \\ |f_u| \leq a_2(x) + b(1 + |\xi|^p) \end{array}$$

para todo u tal que $|u| < R$, siendo $a_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $a_2 \in L^1$ y $b > 0$.

$(H2)$ Si $p = N$,

$$\begin{array}{l} |\nabla_\xi f| \leq a_1(x) + b(|u|^{q_1} + |\xi|^{p-1})) \\ |f_u| \leq a_2(x) + b(|u|^{r_1} + |\xi|^{r_2})), \end{array}$$

siendo $a_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $a_2 \in L^s$, $s > 1$, $q_1, r_1 > 1$, $1 \leq r_2 < p$ y $b > 0$.

$(H3)$ Si $1 < p < N$,

$$\begin{array}{l} |\nabla_\xi f| \leq a_1(x) + b(|u|^{q_1} + |\xi|^{p-1})) \\ |f_u| \leq a_2(x) + b(|u|^{r_1} + |\xi|^{r_2})), \end{array}$$

siendo $a_1 \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, $a_2 \in L^s$, $s = \dfrac{Np}{N-p} - N + p$, $1 \leq q_1 \leq \dfrac{N(p-1)}{N-p}$, $1 \leq r_1 \leq \dfrac{Np}{N-p} - 1$, $1 \leq r_2 < (p-1) + \dfrac{p}{N}$ y $b > 0$.

Teorema 2.3.4. *En cualquiera de las hipótesis* (Hi)*,* $i = 1, 2, 3$ *se verifica que si*

$$J(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx,$$

$$\langle J'(u), \phi \rangle = \int_\Omega \left(\langle \nabla_\xi f(x, u, \nabla u), \nabla \phi \rangle + f_u(x, u, \nabla u)\phi \right) dx$$

para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$*. Además si* u_1 *verifica que*

$$J(u_1) = \text{mín}\{J(u) | u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

entonces $J'(u_1) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *y*

$$\langle J'(u_1), \phi \rangle = 0, \text{ para toda } \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Demostración. Es sencillamente una laboriosa aplicación de la desigualdad de Hölder y Sobolev, por lo que dejamos al cuidado del lector todos los detalles. ∎

Capítulo 3

Regularidad: estimaciones L^∞ y continuidad Hölder

La teoría de regularidad de mínimos de funcionales, o de soluciones de *energía finita* de ecuaciones elípticas en forma divergencia, es uno de los capítulos más brillantes del desarrollo de las Matemáticas del Siglo XX. El trabajo pionero de De Giorgi en 1957, [12], fue casi simultaneo al de Nash en 1958, [34], mucho mas dificil de leer por lo que ha tenido menos relieve. Un poco mas tarde aparecen los articulos de Moser [32] y [33] con demostraciones diferentes a las de De Giorgi. Hablando de manera simplificada, De Giorgi mide conjuntos de nivel, en tanto que Moser utiliza convenientes funciones test *no lineales*. Extensiones importantes son debidas a Stampacchia (véase la lista de artículos en [41]), Ladyzhenskaya-Ural'tseva, [27], y Serrin, [40].

Para describir la teoría de regularidad en este contexto variacional, podemos decir que se parte de una solución en el sentido de los espacios de Sobolev, a partir de ella se estudia:

- Hipótesis generales sobre la ecuación y los datos bajo las cuales tal solución sea localmente acotada.
- Hipótesis generales para que una solución acotada sea Hölder continua.
- Hipótesis para saber cuando además una solución es Lipschitz o, al menos, si es derivable en algún sentido débil mejor que el que da la propia estimación de energía.
- Estudio de la diferenciabilidad clásica y propiedades de las derivadas.

Obviamente a medida que se avanza en el programa anterior las condiciones en la ecuación y en los datos son cada vez más restrictivas.

Vamos a seguir el resultado de Giaquinta y Giusti en [22] que es válido para mínimos locales de funcionales y, por tanto, como veremos, para soluciones débiles de ecuaciones elípticas en forma de divergencia. Observamos que los resultados son válidos para ecuaciones *no lineales en forma de divergencia* con algunas condiciones naturales de crecimiento. La extensión de los resultados de De Giorgi-Nash-Moser debidos a Giaquinta y Giusti no son extensiones gratuitas, están dirigidos a unificar la teoría de regularidad para una amplísima clase de problemas, incluyendo también, por ejemplo, los problemas de obstáculo estudiados por De Giorgi y Stampacchia.

Vamos a centrarnos en la estimación L^∞ y en la hölderianidad de soluciones débiles.[1] La diferenciabilidad y otros resultados pueden verse en los libros [23] y [27].

Definición 3.0.5. *Sea el funcional*

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)dx$$

definido sobre $W^{1,p}(\Omega)$. *Si* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *definimos para* $K \subset\subset \Omega$

$$I(u, K) \equiv \int_K f(x, u, \nabla u)dx.$$

Dado $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *diremos que es un mínimo local de* I *si para toda* $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ *con* $K = sop\ \phi \subset\subset \Omega$, *se tiene*

$$I(u, K) \leq I(u + \phi, K) \tag{3.1}$$

Diremos que u *es un* Q*-mínimo,* $Q > 1$*, para* I *si (3.1) es sustituido por*

$$I(u, K) \leq Q\, I(u + \phi, K) \tag{3.2}$$

De acuerdo con la anterior definición un *mínimo local* es un *1-mínimo*. Los resultados que se van a obtener son válidos para Q-mínimos, pero, por simplicidad de escritura haremos las pruebas para mínimos locales. Véase [24] para más detalles sobre estos extremos.

En las secciones siguientes se usaran los siguientes resultados de carácter numérico.

Lema 3.0.6. *Sea* $Z : [\rho, R] \longrightarrow [0, M]$ *una función. Supongamos que si* $\rho \leq t < s \leq R$ *se verifica*

$$Z(t) \leq \theta Z(s) + [A(s-t)^{-\alpha} + B(s-t)^{-\beta} + C]$$

con $A, B, C \geq 0$, $\alpha > \beta > 0$ *y* $0 < \theta < 1$. *Entonces,*

$$Z(\rho) \leq c(\alpha, \theta)[A(R-\rho)^{-\alpha} + B(R-\rho)^{-\beta} + C]$$

Demostración. Sea $\{t_k\}$ la sucesión definida por $t_0 = \rho$, $t_{k+1} - t_k = (1-\lambda)\lambda^k(R-\rho)$ donde $\lambda \in (0,1)$ será elegido de manera conveniente. Por inducción sobre k se concluye que

$$Z(\rho) \leq \theta^k Z(t_k) + (\sum_{j=1}^{k-1} \theta^j \lambda^{-j\alpha})[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha (R-\rho)^\alpha} + \frac{B}{(1-\lambda)^\beta (R-\rho)^\beta} + C]$$

Si tomamos $\lambda^{-\alpha}\theta < 1$ y pasamos al límite obtenemos

$$Z(\rho) \leq c(\alpha, \theta)[\frac{A}{(R-\rho)^{-\alpha}} + \frac{B}{(R-\rho)^\beta} + C]$$

con $c(\alpha, \theta) = (1-\lambda)^{-\alpha}(1-\theta\lambda^{-\alpha})^{-1}$, ya que $\alpha > \beta$. ∎

[1] En el seminario veremos algún resultado de estimaciones L^p para el gradiente.

Lema 3.0.7. *Sea $\alpha > 0$ y sea $\{x_k\}$ una sucesión verificando*

$$x_{k+1} \leq CB^k x_k^{(1+\alpha)}, \text{ con } C > 0,\ B > 1.$$

Entonces, si $x_0 \leq C^{-\frac{1}{\alpha}} B^{-\frac{1}{\alpha^2}}$, resulta

$$x_k \leq B^{-\frac{k}{\alpha}} x_0$$

y en particular $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Demostración. Por inducción. Para $k = 0$ es obvio que se verifica la igualdad. Si suponemos cierto el resultado para k, se tiene

$$x_{k+1} \leq CB^k x_k^{1+\alpha} \leq CB^k (B^{-\frac{k}{\alpha}} x_0)^{1+\alpha} = (CB^{\frac{1}{\alpha}}) x_0^\alpha B^{-\frac{k+1}{a}} x_0 \leq B^{-\frac{k+1}{a}} x_0$$

por la hipótesis en x_0. ∎

Lema 3.0.8. *Sea $\phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ función creciente y supongamos que existe θ, $0 < \theta < 1$ tal que para todo $R > R_0$*

$$\phi(\theta R) \leq \theta^\delta \phi(R) + BR^\beta, \text{ con } 0 < \beta < \delta. \tag{3.3}$$

Entonces existe $C = C(\theta, \delta, \beta)$ tal que para todo $\rho < R > R_0$ se verifica,

$$\phi(\rho) \leq C\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta \phi(R) + B\rho^\beta\right\}.$$

Demostración. De (3.3) y por inducción se obtiene

$$\phi(\theta^{k+1}R) \leq \theta^{\delta(k+1)}\phi(R) + BR^\beta \theta^{k\beta} \textstyle\sum_{j=0}^k \theta^{j(\delta-\beta)} \leq$$

$$\theta^{\delta(k+1)}\phi(R) + C_1(\theta,\beta,\delta) BR^\beta \theta^{k\beta}$$

Tomando ahora $k \in I\!N$ tal que $\theta^{k+1} \leq \dfrac{\rho}{R} < \theta^k$ se concluye el resultado. ∎

3.1. Estimaciones L^∞ para mínimos locales de funcionales

Vamos a ocuparnos como en secciones anteriores de mínimos de funcionales de la forma

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx$$

sobre un dominio $\Omega \subset I\!R^N$.

Nota 3.1.1. *Obsérvese que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es un mínimo local y $p > N$, por el teorema de Morrey se tiene que u es localmente acotada (de hecho hölderiana). Nos limitaremos entonces al caso no trivial $1 < p \leq N$.*

Empezamos por establecer las hipótesis para f que se requieren para obtener las estimaciones L^∞,

$(F1)$ $f : \Omega \times I\!R \times I\!R^N \longrightarrow I\!R$ es una función de Caratheodory, es decir, medible en x para (u, ξ) fijos y continua en (u, ξ) para casi todo $x \in \Omega$.

$(F2)$ Existe una constantes $\Lambda > 1$ tal que

$$|\xi|^p - b(x)|u|^\gamma - a(x) \le f(x, u, \xi) \le \Lambda|\xi|^p + b(x)|u|^\gamma + a(x)$$

donde $a(x), b(x) \ge 0$ y

1. Si $1 < p < N$, $1 \le \gamma < \dfrac{Np}{N-p} \equiv p^*$, $a \in L^s(\Omega)$ con $s > \dfrac{N}{p}$ y $b \in L^\sigma$ con $\sigma \ge \dfrac{p^*}{p^* - \gamma}$.
2. Si $p = N$, $\gamma > 1$ arbitrario y $a, b \in L^s(\Omega)$ con $s > 1$.

Todos los resultados de esta sección son válidos para Q-mínimos, pero por simplicidad de escritura trabajaremos siempre sobre mínimos locales.

Varias observaciones serán útiles.

En primer lugar, si u es un mímimo local de I en el sentido de la definición 3.0.5 y f satisface $(F1)$ y $(F2)$ se tiene,

$$\int_{sop\phi} f(x, u, \nabla u)dx \le \int_{sop\phi} f(x, u + \phi, \nabla u + \nabla\phi)dx,$$

para las funciones test correspondientes, de donde,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{sop\phi} |\nabla u|^p - \int_{sop(\phi)} b(x)|u|^\gamma - \int_{sop\phi} a(x)dx \le \\ &\textstyle\Lambda \int_{sop\phi} |\nabla(u+\phi)|^p + \int_{sop\phi} b(x)|u+\phi|^\gamma + \int_{sop(\phi)} a(x)dx. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Precisamos la notación que usaremos para designar los conjuntos de nivel de las funciones.

(A) Q_R designara un cubo de lado R con lados paralelos a los ejes fijados.

(B) $A_k = \{x \in \Omega \,|u(x) > k\}$, y $A(k, R) = A_k \cap Q_R$

(C) $B_k = \{x \in \Omega \,|u(x) < k\}$, y $B(k, R) = B_k \cap Q_R$, así se verifica

$$|A(k, R)| = |Q_R| - |B_(k, R)|.$$

Consideraremos solo el caso $1 < p < N$. El caso $p = N$ es mucho más sencillo. (Véase [24]). En este sentido definimos,

$$\frac{1}{s} = \frac{p}{N} - \varepsilon,\ \frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{\gamma}{p^*} - \varepsilon,$$

en ambos casos $\varepsilon > 0$.

Lema 3.1.2. *Sea f verificando $(F1),(F2)$ y sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ un mínimo local del funcional*

$$I(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)dx. \tag{3.5}$$

Entonces existe $R_0 = R_0(||b||_\sigma, ||u||_{p^*}) > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \Omega$, para todo par ρ, R, con $0 < \rho < R < \text{mín}(R_0, d(x_0, \partial\Omega))$, y para todo $k \geq 0$ se tiene,

$$\int_{A(k,\rho)} |\nabla u|^p dx \leq \frac{c}{(R-\rho)^p} \int_{A(k,R)} (u-k)^p dx + c\left(||a||_s + k^p R^{-N\varepsilon}\right) |A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \tag{3.6}$$

(Aquí se supone que $Q_\rho \subset Q_R$ son cubos concéntricos centrados en x_0).

Demostración. Sea $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_R)$ una función corte, es decir, tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) = 1$ en Q_ρ y $|\nabla \eta| \leq \dfrac{2}{(R-\rho)}$. Sea $w(x) = (u-k)^+ \equiv \text{máx}\{(u-k), 0\}$, y tomamos como función test en la definición de mínimo local a $-\eta(x)w(x) \in W^{1,p}(Q_R)$, es decir, si consideramos $v(x) = u(x) - \eta(x)w(x)$, tenemos,

$$I(u, A(k,R)) \leq I(v, A(k,R)),$$

o bien, usando las hipótesis $(F1)$, $(F2)$,

$$\int_{A(k,R)} |\nabla u|^p dx \leq \int_{A(k,R)} |\nabla v|^p dx + \int_{A(k,R)} (b(|u|^\gamma + |v|^\gamma) + a)dx. \tag{3.7}$$

Observemos que si $x \in A(k,R)$ entonces, $w = u - k$, es decir, podemos escribir

$$u = w + k = u(1-\eta) + \eta(w+k), \text{ o bien, } v = (1-\eta)u + k\eta.$$

Un cálculo elemental implica que,

$$\nabla v = (1-\eta)\nabla u - (u-k)\nabla \eta,$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} |\nabla v|^p &\leq c_0(p)\left((1-\eta)^p |\nabla u|^p + (u-k)^p |\nabla \eta|)^p\right) \leq \\ &\leq c(p)\left((1-\eta)^p |\nabla u|^p + \frac{(u-k)^p}{(R-\rho)^p}\right) \end{aligned}$$

y también,

$$|u|^\gamma + |v|^\gamma \leq c(\gamma)\left((\eta w)^\gamma + |u|^\gamma (1-\eta)^\gamma + \eta^\gamma k^\gamma\right).$$

Sumando a ambos miembros de (3.7)

$$\int_{A(k,R)} b|u|^\gamma dx$$

y sustituyendo las estimaciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,R)}(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx\le\\&c\int_{A(k,R)}(1-\eta)^p(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx+\frac{c}{(R-\rho)^p}\int_{A(k,R)}w^pdx+\\&c\int_{A(k,R)}(b(\eta w)^\gamma+bk^\gamma+a)dx.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y de Sobolev tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,R)}b(\eta w)^\gamma dx\le\left(\int_{A(k,R)}b(\eta w)^{p^*}dx\right)^{p/p^*}\left(\int_{Q_R}[b(\eta w)^{(\gamma-p)}]^{N/p}dx\right)^{p/N}\le\\&c\left(\int_{A(k,R)}|\nabla\eta w|^pdx\right)\left(\int_{Q_R}[b(\eta w)^{(\gamma-p)}]^{N/p}dx\right)^{p/N}\le\\&c\left(\int_{A(k,R)}|\nabla u|^pdx+\int_{A(k,R)}\frac{w^p}{(R-\rho)^pdx}\right)\left(\int_{Q_R}[b(\eta w)^{(\gamma-p)}]^{N/p}dx\right)^{p/N}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Llamando

$$\Gamma(R)=\left(\int_{Q_R}[b(\eta w)^{(\gamma-p)}]^{N/p}dx\right)^{p/N}$$

y por la desigualdad de Hölder para $r=\dfrac{p^*}{(\gamma-p)(N/p)}$ y su conjugado, resulta,

$$\begin{aligned}&\Gamma(R)\le\left(\int_{Q_R}|b|^{N/p}|u|^{(N/p)(\gamma-p)}dx\right)^{p/N}\le\\&\left(\int_{Q_R}|u|^{p^*}dx\right)^{(\gamma-p)/p^*}\left(\int_{Q_R}|b|^{p^*/(p^*-\gamma)}dx\right)^{1-(\gamma/p^*)}\end{aligned}$$

y como

$$\left(\int_{Q_R}|b|^{p^*/(p^*-\gamma)}dx\right)^{1-(\gamma/p^*)}\le|Q_R|^\varepsilon(\int_{Q_R}|b|^\sigma dx)^{1/\sigma},$$

obtenemos

$$\Gamma(R)\le||u||_{p^*}^{(\gamma-p)}||b||_\sigma|Q_R|^\varepsilon,$$

por lo que teniendo en cuenta que $\eta=1$ en Q_ρ y tomando $R<R_0$ suficiente pequeño, (3.8) se convierte en particular en

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho)}(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx\le\\&c\int_{A(k,R)-A(k,\rho)}(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx+\frac{c}{(R-\rho)^p}\int_{A(k,R)}w^pdx+\\&c\int_{A(k,R)}(bk^\gamma+a)dx.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Sumando en los dos miembros de (3.10) $c\int_{A(k,\rho)}(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx$ resulta,

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho)}(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx\le\\&(\frac{c}{c+1})\left(\int_{A(k,R)}(|\nabla u|^p+b|u|^\gamma)dx+\frac{c}{(R-\rho)^p}\int_{A(k,R)}w^pdx+\right.\\&\left.c\int_{A(k,R)}(bk^\gamma+a)dx\right).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Aplicando el Lema 3.0.6 a (3.11) obtenemos,

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho)}(|\nabla u|^p + b|u|^\gamma)dx \leq \\ &c\frac{c}{(R-\rho)^p}\int_{A(k,R)} w^p dx + \quad c\int_{A(k,R)}(bk^\gamma + a)dx.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Observamos que

- $k^{p^*}|A(k,R)| \leq \int_{Q_R}|u|^{p^*}dx$
- $k^\gamma \int_{A(k,R)} bdx \leq k^\gamma ||b||_\sigma |A(k,R)|^{1-\frac{1}{\sigma}}$ y como $1 - \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{\gamma}{p^*} + \varepsilon$ se tiene,

$$\begin{aligned}&k^\gamma||b||_\sigma|A(k,R)|^{1-\frac{1}{\sigma}} = ||b||_\sigma(k^{p^*}|A(k,R)|)^{\frac{\gamma}{p^*}+\varepsilon} = \\ &||b||_\sigma(k^{p^*}|A(k,R)|)^{\frac{\gamma-p}{p^*}}k^p|A(k,R)|^{\frac{p}{p^*}+\varepsilon} = \\ &||b||_\sigma(k^{p^*}|A(k,R)|)^{\frac{\gamma-p}{p^*}}k^p|A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \leq \\ &||b||_\sigma||u||_{p^*}^{\gamma-p}|Q_R|^\varepsilon R^{-\varepsilon N}k^p|A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \leq \\ &R^{-\varepsilon N}k^p|A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}\end{aligned}$$

  ya que tomando R suficientemente pequeño podemos conseguir que sea

$$||b||_\sigma||u||_{p^*}^{\gamma-p}|Q_R|^\varepsilon < 1.$$

- Por último

$$\int_{A(k,R)} a\,dx \leq ||a||_s|A(k,R)|^{1-\frac{1}{\sigma}} \leq ||a||_s|A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon},$$

  ya que $1 - \dfrac{1}{\sigma} = 1 - \dfrac{p}{N} + \varepsilon$.

Sustituyendo en (3.12) concluimos en particular que,

$$\begin{aligned}&\int_{A(k,\rho)}|\nabla u|^p dx \leq \\ &\frac{c}{(R-\rho)^p}\int_{A(k,R)}(u-k)^p dx + c(||a||_s + R^{-\varepsilon N}k^p)|A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}\end{aligned}$$

■

Nota 3.1.3. *La desigualdad (3.6) es un caso particular de la desigualdad de Cacciopoli. De Giorgi observó que esta desigualdad esa la clave para probar la acotación de las soluciones de ecuaciones elípticas en forma de divergencia. La estimacion anterior se combina con la desigualdad de Sobolev, de forma que se pueden estimar los distintos conjuntos de nivel.*

Teniendo en cuenta la Nota precedente establecemos la definición siguiente.

Definición 3.1.4. *Definimos la clase de De Giorgi con constantes* $(H, \chi, \varepsilon, R_0, \kappa_0)$ *por*

$$DG_p^+ = \{u \in W^{1,p}_{loc} | u \text{ satisfaciendo (3.13)}\}$$

donde (3.13)significa que:

Para todo par de cubos concéntricos $Q_\rho \subset Q_R$ con $R < R_0$ y para todo $k > \kappa_0 > 0$ se verifica

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(k,\rho)} |\nabla u|^p dx \le \\ &\frac{H}{(R-\rho)^p} \textstyle\int_{A(k,R)} (u-k)^p dx + H\left(\chi^p + k^p R^{-N\varepsilon}\right) |A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Definimos igualmente

$$DG_p^- = \{u \in W^{1,p}_{loc} | -u \in DG_p^+\}$$

Llamaremos $DG_p = DG_p^- \cap DG_p^+$

Es obvio que si se toma $v = u + \chi R^\beta$ con $\beta = \dfrac{N}{p}\varepsilon$, $v \in W^{1,p}_{loc}$ y además esta en la clase de De Giorgi con otras constantes. Más precisamente, obtenemos,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(h,\rho)} |\nabla v|^p dy \le \\ &\frac{H}{(R-\rho)^p} \textstyle\int_{A(h,R)} (v-h)^p dy + H h^p R^{-N\varepsilon} |A(h,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Además con una homotecia podemos reducirnos al caso $R = 1$. En efecto, si $s < r < R$, partiendo de (3.14) para tales valores, hacemos $y = Rx$ y consideramos

$$w(x) = v(y), \ (\text{ así } D_y v = \frac{1}{R} D_x w),\ r = R\tau,\ s = R\sigma,$$

resultan

$$|A(h,r)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} = R^{N-p+N\varepsilon} |A(h,\tau)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}$$
$$\int_{A(h,s)} |\nabla v|^p dy = R^{N-p} \int_{A(h,\sigma)} |\nabla w|^p dx.$$

Tras verificar el cambio por esta homotecia (3.14) se transforma en,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(h,\sigma)} |\nabla w|^p dx \le \\ &\frac{H}{(\tau-\sigma)^p} \textstyle\int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx + H h^p \tau^{-N\varepsilon} |A(h,\tau)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

y suponiendo $\tau \ge \dfrac{1}{2}$ en,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(h,\sigma)} |\nabla w|^p dx \le \\ &\frac{H}{(\tau-\sigma)^p} \textstyle\int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx + H h^p |A(h,\tau)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Con estas observaciones podemos probar el resultado de De Giorgi.

Teorema 3.1.5. *Sea $u \in DG_p^+$, entonces u es localmente superiormente acotada. Además si $x_0 \in \Omega$ y $R < \text{mín}\{R_0, d(x_0, \partial\Omega)\}$, se verifica*

$$\sup_{Q_{R/2}} u \leq c \left\{ \left(\frac{1}{|Q_R|} \int_{Q_R} u_+^p \right)^{\frac{1}{p}} + \kappa_0 + \chi R^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \right\} \tag{3.16}$$

Demostración. Sea $p\beta = N\varepsilon$. Haciendo las transformaciones previas, es decir, pasando a escala $R = 1$ y suponiendo $h > h_0 = \kappa_0 + \chi R^\beta$, podemos suponer que $w(x) = u(Rx) + \chi R\beta$ verifica

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(h,\sigma)} |\nabla w|^p dx \leq \\ &\frac{H}{(\tau-\sigma)^p} \textstyle\int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx + Hh^p |A(h,\tau)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para $\frac{1}{2} \leq \sigma < \tau \leq 1$, sea $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(Q_{\frac{\sigma+\tau}{2}})$ tal que $\eta(x) = 1$ en Q_σ y $|\nabla\eta| \leq \frac{4}{(\tau-\sigma)}$. Consideremos $\psi = \eta(w-k)_+$ para $k > h$. Entonces

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(k,\sigma)} (w-k)_+^p dx \leq \int \psi^p dx \leq \\ &(\textstyle\int \psi^{p^*} dx)^{p/p^*} |A(k,\tau)|^{1-\frac{p}{p^*}} \leq c(\int |\nabla\psi|^p dx) |A(k,\tau)|^{\frac{p}{N}} \leq \\ &c\left(\textstyle\int_{Q_{\frac{(\sigma+\tau)}{2}}} |\nabla w|^p dx + \frac{1}{(\tau-\sigma)^p} \int_{A(\kappa,(\frac{\sigma+\tau}{2}))} (w-k)^p dx \right) |A(k,\tau)|^{\frac{p}{N}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Usando ahora la hipótesis (3.17), se obtiene

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(k,\sigma)} (w-k)_+^p dx \leq \int \psi^p dx \leq \\ &c\left(\textstyle\int_{Q_{\frac{(\sigma+\tau)}{2}}} |\nabla w|^p dx + \frac{1}{(\tau-\sigma)^p} \int_{A(\kappa,(\frac{\sigma+\tau}{2}))} (w-k)^p dx \right) |A(k,\tau)|^{\frac{p}{N}} \leq \\ &c\left(\frac{1}{(\tau-(\frac{\sigma+\tau}{2}))^p} \textstyle\int_{A(k,\tau)} (w-k)^p dx + Hk^p |A(k,\tau)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} + \right. \\ &\left. \frac{1}{(\tau-\sigma)^p} \textstyle\int_{A(\kappa,(\frac{\sigma+\tau}{2}))} (w-k)^p dx \right) |A(k,\tau)|^{\frac{p}{N}}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

es decir, concluimos que se verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(k,\sigma)} (w-k)_+^p dx \leq \\ &C\left(\frac{|A(k,\tau)|^{\frac{p}{N}}}{(\tau-\sigma)^p} \textstyle\int_{A(k,\tau)} (w-k)^p dx + +k^p |A(k,\tau)|^{1+\varepsilon} \right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Observamos que si $k > h$,

- $\int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx \geq (k-h)^p |A(k,\tau)|$
- $\int_{A(k,\tau)} (w-k)^p dx \leq \int_{A(k,\tau)} (w-h)^p dx \int_{A(h,\tau)} (w-h)^p dx$,

de forma que sustituyendo en (3.20), teniendo en cuenta que $\varepsilon < \dfrac{p}{N}$ y que $|A(k,\tau)| \leq |Q_1|$, obtenemos,

$$\begin{aligned} &\int_{A(k,\sigma)} (w-k)^p dx \leq \\ &\left(\int_{A(h,\sigma)} (w-h)^p dx\right)^{1+\varepsilon} \frac{1}{(k-h)^{p\varepsilon}} \left[\frac{1}{(\tau-\sigma)^p} + \frac{k^p}{(k-h)^p}\right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sea d un número positivo que fijaremos más adelante. Consideramos las sucesiones

$$k_i = 2d(1 - \frac{1}{2^{i+1}}),\ \text{y}\ \sigma_i = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^i}),\ i = 0, 1, 2... \tag{3.22}$$

es decir, $k_0 = d$, $\sigma_0 = 1$, $\lim_{i\to\infty} k_i = 2d$ y $\lim_{i\to\infty} \sigma_i = \dfrac{1}{2}$. Definimos

$$\Phi_i = d^{-p} \int_{A(k_i,\sigma_i)} (w-k_i)^p dx\ i = 0, 1, 2... \tag{3.23}$$

Por (3.21) tenemos

$$\begin{aligned} &\Phi_{i+1} = d^{-p} \int_{A(k_{i+1},\sigma_{i+1})} (w-k_{i+1})^p dx \leq \\ &\left(d^{-p} \int_{A(k_i,\sigma_i)} (w-k_i)^p dx\right)^{1+\varepsilon} d^{p\varepsilon} \frac{1}{(k_{i+1}-k_i)^{p\varepsilon}} \left[\frac{1}{(\sigma_i - \sigma_{i+1})^p} + \frac{k_{i+1}^p}{(k_{i+1}-k_i)^p}\right] \leq \\ &c 2^{3+\varepsilon} \Phi_i^{1+\varepsilon} 2^{pi(1+\varepsilon)} \equiv C B^i \Phi_i^{1+\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.24}$$

$(C = c2^{3+\varepsilon}$, $B = 2^{p(1+\varepsilon)})$.

Si elegimos

$$d = h_0 + C_1 \left(\int_{Q_1} w_+^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

se tiene $d > h_0$, con lo que las iteraciones anteriores son válidas, y si tomamos d grande de forma que

$$\Phi_0 \leq C^{-(1/\varepsilon)} B^{-(1/\varepsilon^2)}$$

estamos en las hipótesis del Lema 3.0.7, por consiguiente,

$$\lim_{i\to\infty} \Phi_i = 0,$$

es decir,

$$|A(2d, \frac{1}{2})| = 0,$$

por tanto,

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}} w \leq 2d = 2C_1 \left(\int_{Q_1} w_+^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + 2h_0.$$

La estimación final se obtiene deshaciendo el cambio de variables. ■

La siguientes consecuencias no son dificiles de obtener.

Corolario 3.1.6. *En las hipótesis del Teorema 3.1.5, si* $0 < t < 1$ *se tiene*

$$\sup_{Q_{tR}} u \leq c \left\{ \left(\frac{1}{(1-t)^N |Q_R|} \int_{(1-t)Q_R} u_+^p \right)^{\frac{1}{p}} + \kappa_0 + \chi R^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \right\} \tag{3.25}$$

Corolario 3.1.7. *En las hipótesis del Teorema 3.1.5, si* $0 < q$ *se tiene que existe una constante* $c(q)$ *tal que*

$$\sup_{Q_\rho} u \leq c \left\{ \left(\frac{1}{(R-\rho)^N} \int_{Q_R} u_+^q \right)^{\frac{1}{q}} + \kappa_0 + \chi R^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \right\} \tag{3.26}$$

para todo $0 < \rho < R \leq \text{mín}\{R_0, d(x_0, \partial\Omega)\}$.

Es obvio que un resultado análogo se obtiene para DG_p^- cambiando acotación superior por acotación inferior. Es decir, para DG_p se obtiene estimación L^∞. Como pone de manifiesto el Lema 3.1.2 los mínimos locales del funcional (3.5) están en una clase de De Giorgi para constantes que dependen de los datos. En consecuencia, el Lema 3.1.2, el Teorema 3.1.5 y el Corolario 3.1.7 nos permiten formular el resultado fundamental de esta sección.

Teorema 3.1.8. *Sea* $u \in W^{1,p}$ *un mínimo local del funcional (3.5) verificando las hipótesis estructurales* $(F1)$ *y* $(F2)$*. Entonces* $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$*. Además, para* $q > 0$ *existe una constante* $c = c(q, ||b||_\sigma, ||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ *tal que si* $0 < \rho < R \leq \text{mín}\{R_0, d(x_0, \partial\Omega)\}$,

$$\sup_{Q_\rho} |u| \leq c \left\{ \left(\frac{1}{(R-\rho)^N} \int_{Q_R} u_+^q \right)^{\frac{1}{q}} + ||a||_s^{1/p} R^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \right\}$$

3.2. Continuidad Hölder para mínimos locales de funcionales

En esta sección demostramos la hölderianidad de los mínimos locales de funcionales, los mismos para los cuales se ha demostrado la acotación anterior. Con la acotación de u como hipótesis podemos sustituir la condición $(F2)$ por la siguiente.

$(F2')$ Sea $M \geq \sup |u|$. Existen $\Lambda(M) > 1$ y $a(x, M)$, $a(\bullet, M) \in L^s$, $s > N/p$, crecientes en M, tales que

$$|\xi|^p - a(x, M) \leq f(x, u, \xi) \leq \Lambda(M)|\xi|^p + a(x, M)$$

Dado un cubo Q_R usaremos la siguiente notación

$$M(R) = \sup_{Q_R} u,\ \ m(R) = \inf_{Q_R},\ \ \text{y } \omega(u,R) = M(R) - m(r).$$

Esta notación se refiere siempre a cubos centrados en un mismo punto.

El objetivo de esta sección es, entonces, establecer que la oscilación $\omega(u,R)$ es de tipo potencia, es decir que u tiene un módulo de continuidad de la forma $\omega(u,R) \approx R^\beta,\ 0 < \beta < 1$.

Fijemos $M = 2\sup|u|$. Si se repiten los argumentos de la demostración del Lema 3.6 con la hipótesis $(F2')$ se obtienen las siguientes desigualdades de tipo Cacciopoli,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{A(k,\rho)} |\nabla u|^p dx \leq \\ &\frac{H}{(R-\rho)^p} \textstyle\int_{A(k,R)} (u-k)^p dx + H\chi^p |A(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.27}$$

y

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{B(k,\rho)} |\nabla u|^p dx \leq \\ &\frac{H}{(R-\rho)^p} \textstyle\int_{B(k,R)} (k-u)^p dx + H\chi^p |B(k,R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Además las constantes son uniformes en k si $k + \sup|u| < M$.

La idea es que la independencia de $(F2')$ de u hace que en las desigualdades anteriores no aparezca el término en h. Con las desigualdades anteriores podemos formular el primer resultado previo a establecer la hölderianidad.

Lema 3.2.1. *Sea $u \in L^\infty$ verificando (3.27) para todo $k \in I\!R$. Entonces si $k_0 + \sup|u| < M$ se verifica*

$$\sup_{Q_{R/2}} u \leq c\left(\frac{1}{R^N}\int_{A(k_0,R)} (u-k_0)^p dx\right)^{1/p} \left(\frac{|A(k_0,R)|}{R^N}\right)^{\alpha/p} + k_0 + \chi R^\beta \tag{3.29}$$

donde $p\beta = N\varepsilon$ y $\alpha^2 + \alpha = \varepsilon$, $\alpha > 0$.

Demostración. Por simplicidad de escritura tomamos $k_0 = 0$. Por (3.27), repitiendo la prueba del Teorema 3.1.5, se obtiene la estimación siguiente

$$\int_{A(k,\rho)} (u-k)^p dx \leq c\frac{|A(k,r)|^{p/N}}{(r-\rho)^p}\int_{A(k,r)} (u-k)^p dx + c\chi^p |A(k,r)|^{1+\varepsilon}, \tag{3.30}$$

para todo $0 < \rho < r < R$. Si $h < k$ para todo $\rho < r$ tenemos

$$|A(k,\rho)| \leq \frac{1}{(h-k)^p}\int_{A(h,r)} (u-h)^p dx. \tag{3.31}$$

Llamando $U(k,t) = \int_{A(k,t)} (u-k)^p dx$, de las desigualdades(3.30), (3.31) implican

$$\begin{aligned} &U(k,\rho) \leq c(r-\rho)^{-p} U(h,r)|A(h,r)|^{p/N} + c\chi^p (h-k)^{-p} U(k,r)|A(k,r)|^{\varepsilon} \leq \\ &c\left[(\frac{r}{r-\rho})^p + (\frac{\chi r^\beta}{k-h})^p\right] r^{-N\varepsilon} U(h,r)|A(h,r)|^{\varepsilon} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Elevando (3.31) a α y multiplicando miembro a miembro por (3.32) se tiene

$$U(k,\rho)|A(k,\rho)|^\alpha \leq c\left[(\frac{r}{r-\rho})^p + (\frac{\chi r^\beta}{k-h})^p\right]\frac{r^{-N\varepsilon}}{(k-h)^{p\alpha}}U^{1+\alpha}(h,r)|A(h,r)|^\varepsilon \tag{3.33}$$

Como $\alpha > 0$ y $\alpha^2 + \alpha = \varepsilon$, poniendo

$$\phi(k,t) = U(k,t)|A(k,t)|^\alpha,$$

$\rho < r < R$ y $h < k$, se tiene

$$\phi(k,\rho) \leq c\left[(\frac{r}{r-\rho})^p + (\frac{\chi r^\beta}{k-h})^p\right]\frac{r^{-N\varepsilon}}{(k-h)^{p\alpha}}\phi^{1+\alpha}(h,r).$$

Tomamos $d = \chi R^\beta + CR^{-\frac{N\varepsilon}{\alpha p}}\phi_0^{1/p}$ con C una constante a elegir. Tomamos las sucesiones,

$$k_i = d(1-\frac{1}{2^i}),\ r_i = \frac{R}{2}(1+\frac{1}{2^i}),\ i = 0,1,2...$$

Llamando $\phi_i = \phi(k_i, r_i)$ la desigualdad anterior implica,

$$\phi_{i+1} \leq cd^{-p\alpha}2^{p(1+\alpha)i}R^{-N\varepsilon}\phi_i^{1+\alpha},\ i = 0,1,2...$$

Eligiendo C suficientemente grande ϕ_0 verifica la hipótesis del Lema 3.0.7 por lo que,

$$\lim_{\imath\to\infty}\phi = 0,\ \text{es decir, } \phi(d,\frac{R}{2}) = 0.$$

Por tanto, tenemos

$$\sup_{Q_{R/2}} u \leq c\left(\frac{1}{R^N}\int_{A(0,R)}u^p dx\right)^{1/p}\left(\frac{|A(0,R)|}{R^N}\right)^{\alpha/p} + \chi R^\beta$$

El teorema resulta sustituyendo u por $u - k_0$. ■

Ahora necesitamos estimar u cerca del máximo en un cubo para ello necesitamos el siguiente Lema.

Lema 3.2.2. *Sea $u \in L^\infty$ verificando (3.27) con $p > 1$ y para todo $k \in I\!R$. Sea $2k_0 = M(2R) + m(2R)$. Supongamos que para algún γ, $0 < \gamma < 1$, se verifica*

$$|A(k_0,R)| \leq \gamma |Q_R|.$$

Entonces, si existe $n \in I\!N$ tal que

$$\omega(u,2R) \geq 2^{n+1}\chi R^\beta,$$

para $k_n = M(2R) - 2^{-(n+1)}\omega(u,2R)$ se verifica,

$$|A(k_n,R)| \leq cn^{-\frac{N(p-1)}{p(N-1)}}|Q_R|.$$

Demostración. Para $k_0 < h < k$ definimos la función truncamiento

$$G(s) = \begin{cases} k-h, \text{ si } s \geq k, \\ u-h, \text{ si } h < s < k, \\ 0 \quad \text{si } u \leq h \end{cases}$$

Así $G(u) = 0$ en $Q_R - A(k_0, R)$ y por hipótesis $|Q_R - A(k_0, R)| \geq (1-\gamma)|Q_R|$. Por la desigualdad de Sobolev se tiene,

$$\left(G(u)^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{N}} \leq C \int_{Q_R} |\nabla G(u)| dx = C \int_{A(h,R)-A(k,R)} |\nabla u| dx$$

Llamando $\Delta(h,k) = A(h,R) - A(k,R)$, se tiene

$$(k-h)|A(k,R)|^{1-\frac{1}{N}} \leq \left(G(u)^{\frac{N}{N-1}} dx \right)^{1-\frac{1}{N}} \leq c|\Delta(h,k)|^{1-\frac{1}{p}} \left(|\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Por otra parte por (3.27) se tiene tomando R y $2R$ como lados de los cubos,

$$\begin{aligned} &\int_{A(h,R)} |\nabla u|^p dx \leq \\ &\frac{c}{R^p} \int_{A(h,2R)} (u-h)^p dx + c\chi^p |A(k,2R)|^{1-\frac{p}{N}+\varepsilon} \leq \\ &cR^{N-p}(M(2R)-h)^p + c\chi^p R^{N-p+N\varepsilon}. \end{aligned}$$

Pero si $h \leq k_n$ se tiene $M(2R) - h \geq M(2R) - k_n \geq \chi R^\beta$, entonces de la desigualdad anterior y recordando que $p\beta = N\varepsilon$ se concluye que,

$$\begin{aligned} &\int_{A(h,R)} |\nabla u|^p dx \leq \\ &cR^{N-p}(M(2R)-h)^p + c\chi^p R^{N-p+N\varepsilon} \leq CR^{N-p}(M(2R)-h)^p. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(k-h)|A(k,R)|^{1-\frac{1}{N}} \leq C|\Delta(h,k)|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{N-p}{p}} (M(2R)-h). \tag{3.34}$$

Tomamos los niveles

$$k_i = M(2R) - \frac{1}{2^{i+1}} \omega(u, 2R),$$

entonces (3.34) aplicado a $h = k_{i-1}$, $k = k_i$ implica que

$$|A(k_i, R)|^{1-\frac{1}{N}} \frac{\omega(u,2R)}{2} \leq c|\Delta(k_{i-1}, k_i)|^{1-\frac{1}{p}} R^{\frac{N-p}{p}} \frac{\omega(u,2R)}{2^{i+1}}$$

y así,

$$|A(k_n, R)|^{\frac{p(N-1)}{N(p-1)}} \leq |A(k_i, R)|^{\frac{p(N-1)}{N(p-1)}} \leq c|\Delta(k_{i-1}, k_i)| R^{\frac{N-p}{p-1}}$$

Sumando en i hasta $i = n$ se tiene

$$n|A(k_n, R)|^{\frac{p(N-1)}{N(p-1)}} \leq cR^{\frac{N-p}{p-1}} \sum_{i=1}^{n} |\Delta(k_{i-1}, k_i)| \leq cR^{\frac{N-p}{p-1}} |A(k_0, R)| \leq cR^{\frac{p(N-1)}{(p-1)}}$$

de donde,

$$|A(k_n, R)| \leq Cn^{-\frac{N(p-1)}{p(N-1)}} |Q_R|$$

■

Podemos demostrar el Teorema fundamental de esta sección que es una extensión del clásico de De Giorgi.

Teorema 3.2.3. *Sea $u \in L^\infty$ verificando (3.27) y (3.28) con $p > 1$ para todo $k \in I\!R$. Entonces $u \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\Omega)$, es decir, es localmente hölderiana en Ω.*

Demostración. Sea como antes $k_0 = M(2R) + m(2R)$. Se puede suponer que $|A(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}|Q_R|$ pues en caso contrario sería $|B(k_0, R)| \leq \frac{1}{2}|Q_R|$ y bastaría argumentar sobre $-u$.

Tomamos $k_n = M(2R) - \frac{1}{2^{n+1}}\omega(u, 2R)$, de forma que se tiene, $k_n > k_0$. Usando (3.29) para k_n en vez de k_0, se tiene,

$$\begin{aligned} &\sup_{Q_{R/2}}(u - k_n) \leq c\left(\frac{1}{R^N}\int_{A(k_n,R)}(u - k_n)^p dx\right)^{1/p}\left(\frac{|A(k_n, R)|}{R^N}\right)^{\frac{\alpha}{p}} + \chi R^\beta \leq \\ &c\sup_{Q_R}(u - k_n)_+\left(\frac{|A(k_n, R)|}{R^N}\right)^{\frac{\alpha+1}{p}} + \chi R^\beta \end{aligned} \tag{3.35}$$

Tomamos n de manera que $cn^{-\frac{N(p-1)}{p(N-1)}} < \frac{1}{2}$. Por el Lema 3.2.2, si

$$\omega(u, 2R) \geq 2^{n+1}\chi R^\beta,$$

entonces

$$|A(k_n, R)| \leq cn^{\frac{N(p-1)}{p(N-1)}} |Q_R|.$$

Por tanto de (3.35) se obtiene

$$(M(\frac{R}{2}) - k_n) \leq \frac{1}{2}(M(2R) - k_n) + c\chi R^\beta,$$

y restándo de ambos miembros $m(\frac{R}{2})$ se concluye que

$$\omega(u, \frac{R}{2}) \leq \omega(u, 2R)(1 - \frac{1}{2^{n+2}}) + c\chi R^\beta. \tag{3.36}$$

Es decir, o bien

$$\omega(u,2R) \leq 2^{n+1}\chi R^{\beta},$$

o bien

$$\omega(u,2R) > 2^{n+1}\chi R^{\beta},$$

y entonces se satisface (3.36). En todo caso tenemos,

$$\omega(u,\frac{R}{2}) \leq \omega(u,2R)(1-\frac{1}{2^{n+2}}) + c2^{n}\chi R^{\beta}.$$

Aplicamos el Lema 3.0.8 con $\theta = \frac{1}{4}$ y $\delta = \log_{\theta}(1-\frac{1}{2^{n+2}})$ (podemos suponer siempre $\beta < \delta$ pues por tratase de un resultados local podemos limitarnos a considerar $R < 1$). Entonces

$$\omega(u,\rho) \leq C\left((\frac{\rho}{R})^{\beta}\omega(u,R) + \chi\rho^{\beta}\right), \text{ para todo } \rho < R < \min\{R_0, d(x_0,\partial\Omega)\}$$

■

La localidad de la propiedad demostrada viene del hecho que β no depende del centro de los cubos, pero, sin embargo, si calculamos la norma de u en $\mathcal{C}^{0,\beta}(\Sigma)$ para Σ subconjunto compacto de Ω, no tenemos control de ella cuando Σ se aproxima a Ω. Para tener estimaciones globales se deben requerir hipótesis extra.

Capítulo 4

Funcionales coercivos relacionados con una desigualdad de Hardy

4.1. Introducción

En este Capítulo analizamos un problema relacionado con un funcional asociado a una función convexa en el gradiente, pero que queda fuera de las aplicaciones del teorema de De Giorgi para establecer la semicontinuidad inferior débil estudiado en el Capítulo 2. Más precisamente comenzaremos con la ecuación de Euler asociada a dicho funcional,

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv -\Delta_p u - \frac{\lambda}{|x|^p}|u|^{p-2}u.$$

y, en general, estudiaremos ecuaciones de la forma $\mathcal{L}_\lambda u = F(x,u)$ bajo hipótesis de regularidad y crecimiento para F. Podemos mirar este tipo de problemas como un caso límite de un problema de autovalores, es decir, el caso en que el potencial pertenece a L^r si y solo si $r < \dfrac{N}{p}$, que es el caso que satisface $-\dfrac{\lambda}{|x|^p}$ y es el complementario al estudiado clásicamente. (Véase [27].)

Aplicaciones y el estudio del caso parabólico pueden verse en [21].

De una forma vaga podemos decir que todos los problemas aparecen por la falta de compacidad en la desigualdad de Hardy que estudiamos en la sección siguiente.

4.2. Desigualdad de Hardy

El principal objetivo de esta sección es discutir el siguiente resultado clásico, esencialmente debido a Hardy. (Véase [26]).

Para conveniencia del lector incluimos la demostración.

Lema 4.2.1. *Sea $1 < p < N$, entonces si $u \in W^{1,p}(I\!R^N)$.*

1. $\dfrac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

2. *(Hardy Inequality)*
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \le C_{N,p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$$
with $C_{N,p} = (\dfrac{p}{N-p})^p$.

3. *La constante* $C_{N,p}$ *es óptima.*

Demostración.

Paso 1. Un argumento de densidad permite considerar solamente funciones $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. En esta hipótesis tenemos la siguiente identidad

$$|u(x)|^p = -\int_1^\infty \frac{d}{d\lambda} |u(\lambda x)|^p d\lambda = -p \int_1^\infty u^{p-1}(\lambda x) \langle x, \nabla u(\lambda x) \rangle d\lambda\,.$$

Por la desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx = -p \int_1^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u^{p-1}(\lambda x)}{|x|^{p-1}} \langle \frac{x}{|x|}, \nabla u(\lambda x) \rangle dx d\lambda = \\
&-p \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{N-1-p}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)^{p-1}}{|y|^{p-1}} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy = -\frac{p}{N-p} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)^{p-1}}{|y|^{p-1}} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy \le \\
&\frac{p}{N-p} (\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|^p}{|y|^p} dy)^{(p-1)/p} (\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\frac{\partial u(y)}{\partial r}|^p dy)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por tanto,
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{u^p(x)}{|x|^p} dx \le (\frac{p}{N-p})^p \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx\,.$$

Paso 2. Optimalidad de la constante . Siguiendo las ideas de Hardy para el caso unidimensional probamos que la mejor constante es $C_{N,p} = (\frac{p}{N-p})^p$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la función radial

$$U(r) = \begin{cases} A_{N,p,\varepsilon} & \text{si} \quad r \in [0,1], \\ A_{N,p,\varepsilon} r^{\frac{p-N}{p} - \varepsilon} & \text{si} \quad r > 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $A_{N,p,\varepsilon} = p/(N - p + p\varepsilon)$, y cuya derivada es

$$U'(r) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad r \in [0,1], \\ -r^{-\frac{N}{p} - \varepsilon} & \text{si} \quad r > 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Calculando se obtiene

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{U^p(x)}{|x|^p}dx = \int_B \frac{U^p(x)}{|x|^p}dx + \int_{\mathbb{R}^N - B} \frac{U^p(x)}{|x|^p}dx =$$

$$= A^p_{N,p,\varepsilon}\omega_N \left(\int_0^1 r^{N-1-p}dr + \int_1^\infty r^{-(1+p\varepsilon)}dr \right) =$$

$$= A^p_{N,p,\varepsilon}\omega_N \int_0^1 r^{N-1-p}dr + A^p_{N,p,\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^p dx,$$

donde ω_N es la medida de la esfera $(N-1)$-dimensional. Haciendo tender $\varepsilon \to 0$ se obtiene la conclusión. ∎

Corolario 4.2.2. *El mismo resultado se cumple en $W^{1,p}(B)$, donde B es la bola unidad en $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. La demostración del primer paso es la misma. La optimalidad de la constante se obtiene por un argumento de aproximación.

En primer lugar, nótese que por la invariancia por dilataciones la constante es independiente del radio de la bola. En segundo lugar, sea B_R la bola de radio R con R suficientemente grande. Tomemos como función test $v(x) = \psi(x)U(x)$ donde U es uno de los optimizantes dados explicitamente explicitly antes y $\psi \in C_0^\infty(B_R)$ es una función corte que es identicamente 1 en B_{R-1} y tal que $|\nabla\psi| \leq m$. Es fácil ver que si $R \gg 1$ la influencia de ψ en los cálculos del Paso 2 es despreciable. ∎

Nota 4.2.3. *En alguna literatura se refiere la desigualdad de Hardy para $p = 2$ como principio de incertidumbre, véase [18].*

Podemos interpretar la desigualdad de Hardy diciendo que la inclusión de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ en L^p con respecto al peso $|x|^{-p}$, es continua. Trabajando con los minimizantes usados en la prueba del teorema, no es difícil probar que, sin embargo, la inclusión no es compacta. Este hecho ocasionará muchas dificultades.

De ahora en adelante denotaremos $\lambda_{N,p} = C^{-1}_{N,p}$.

El resultado siguiente compara la mejor constante de la desigualdad de Hardy con *problemas de autovalores aproximados*.

Teorema 4.2.4. *Sea $\lambda_1(n)$ el primer autovalor del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p \psi_1 = \lambda W_n(x)|\psi_1|^{p-2}\psi_1,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ \psi_1(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

donde $W_n(x) = \text{mín}\{|x|^{-p}, n\}$.

Entonces $\lambda_1(n) \geq \lambda_{N,p}$, y además $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1(n) = \lambda_{N,p}$.

Demostración. La primera desigualdad es consecuencia inmediata de la definición del primer autovalor por el cociente de Rayleigh.

También es fácil ver que $\{\lambda_1(n)\}$ es una sucesión no creciente; entonces hemos de probar que el límite no puede ser mayor que $\lambda_{N,p}$. Por contradicción, suponemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1(n) = \lambda_{N,p} + \rho$.

Entonces, podemos elegir $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^p dx}{\int_\Omega \phi^p |x|^{-p} dx} < \lambda_{N,p} + \rho/2.$$

Pero entonces $\lambda_1(n) \leq \dfrac{\int_\Omega |\nabla\phi|^p dx}{\int_\Omega \phi^p W_n(x) dx}$, que es una contradicción porque la última expresión ha de ser menor que $\lambda_{N,p} + \rho$ para n grande. ■

4.3. El Principio Variacional de Ekeland

En esta sección estudiamos un principio general debido a Ekeland y del cual se obtienen múltiples resultados variacionales.

La idea del *ε-principio variacional* de Ekeland es la siguiente: Supongamos f una función real, semicontinua inferiormente, definida en el espacio métrico $(\mathcal{M}, d)$ y tal que $f(x) \geq \beta$ para todo $x \in \mathcal{M}$. El principio consiste en la construcción de sucesiones minimizantes con algún control, más precisamente, dado $\varepsilon > 0$ construir sucesiones verificando

$$\inf_{x\in\mathcal{M}} \{f(x)\} + \varepsilon > f(x_\varepsilon),$$

y

$$f(y) \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon d(x_\varepsilon, y).$$

El significado geométrico del principio de Ekeland puede entenderse diciendo que para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar x_ε en el cual el valor del funcional está cerca del ínfimo en menos de ε y el grafo de f está *encima del cono de abertura ε*. Véase el artículo original [16]; aquí seguimos la demostración en [30].

Teorema 4.3.1. *Sea $\mathcal{M}$ espacio métrico completo y sea*

$$\phi : \mathcal{M} \to (-\infty, \infty]$$

una función propia tal que,

i) $\phi(y) \geq \beta$,

ii) ϕ *inferiormente semicontinua.*

Dado $\varepsilon > 0$ y $u \in \mathcal{M}$ tal que

$$\phi(u) \leq \inf_{\mathcal{M}} \phi + \varepsilon,$$

entonces existe $v \in \mathcal{M}$ tal que:

1. $\phi(u) \geq \phi(v)$,

2. $d(u,v) \leq 1$,

3. *Si* $v \neq w \in \mathcal{M}$ *entonces* $\phi(w) \geq \phi(v) - \varepsilon d(v,w)$.

Demostración. Fijo $\varepsilon > 0$, definimos la siguiente relación de orden sobre $\mathcal{M}$, decimos que

$$w \leq v, \quad \text{si y solo si} \quad \phi(w) + \varepsilon d(w,v) \leq \phi(v).$$

Consideremos $u_0 = u$ y por recurrencia definimos la sucesión $\{u_n\}$, como sigue: para $n \in I\!N$ tomamos

$$S_n = \{w \in \mathcal{M} : w \leq u_n\},$$

eligiendo $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n}\{\phi\} + \frac{1}{n+1},$$

obtenemos que $u_{n+1} \leq u_n$ y $S_{n+1} \subset S_n$. La semicontinuidad inferior de ϕ implica que S_n es un cerrado. Ahora, si $w \in S_{n+1}$, tenemos $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ y entonces,

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq \phi(u_{n+1}) - \phi(w) \leq \inf_{S_n}\{\phi\} + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n}\{\phi\} = \frac{1}{n+1}.$$

Es decir, llamando diámetro$(S_{n+1}) = \delta_{n+1}$, $(\delta_{n+1}) \leq \dfrac{2}{\varepsilon(n+1)}$, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \delta_{n+1} = 0$. Como $\mathcal{M}$ es completo, $\cap_{n=1}^{\infty} S_n = \{v\}$ para algún $v \in \mathcal{M}$. Pero, en particular, $v \in S_0$, luego $v \leq u_0 = u$, es decir, $\phi(v) \leq \phi(u) + \varepsilon d(u,v) \leq \phi(u)$ y

$$d(u,v) \leq \frac{\phi(u) - \phi(v)}{\varepsilon} \leq \varepsilon^{-1}(\inf_{\mathcal{M}}\{\phi\} + \varepsilon - \inf_{\mathcal{M}}\{\phi\}) = 1.$$

entonces, $d(u,v) \leq 1$.

Para obtener 3), supongamos que $w \leq v$. Entonces para todo $n \in I\!N$, $w \leq u_n$, es decir,

$$w \in \cap_{n=1}^{\infty} S_n$$

y así $w = v$.

Por tanto concluimos que si $w \neq v$ entonces $\phi(w) \geq \phi(v) - \varepsilon d(v,w)$. ■

Los resultados que exponemos a continuación son algunas de las aplicaciones del principio variacional de Ekeland para hallar *puntos críticos* de funcionales.

Corolario 4.3.2. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach y* $\varphi : \mathcal{X} \to I\!R$ *una función diferenciable e inferiormente acotada en* $\mathcal{X}$. *Entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *y para todo* $u \in \mathcal{X}$ *tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_{\mathcal{X}} \varphi + \varepsilon$$

existe $v \in \mathcal{X}$ *verificando*

$$\begin{aligned} &\varphi(v) \leq \varphi(u), \\ &\|u - v\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon^{1/2}, \\ &\|\varphi'(v)\|_{\mathcal{X}'} \leq \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Demostración. En el Teorema 4.3.1 tomamos $\mathcal{M} = \mathcal{X}$, $\phi = \varphi$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = \dfrac{1}{\varepsilon^{1/2}}$, y $d = \|\cdot\|$. Obtenemos $v \in \mathcal{X}$ tal que

$$\varphi(v) \leq \varphi(u)$$
$$\|u - v\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon^{1/2}$$

y para todo $w \neq v$

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \varepsilon^{1/2}\|(v - w)\|.$$

Tomando en particular $w = v + th$ con $t > 0$ y $h \in \mathcal{X}$, $\|h\| = 1$, entonces

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\varepsilon^{1/2}t$$

que implica $-\varepsilon^{1/2} \leq \langle \varphi'(v), h\rangle$ para todo $h \in \mathcal{X}$, $\|h\| = 1$, luego

$$\|\varphi'(v)\|_{\mathcal{X}'} \leq \varepsilon^{1/2}.$$

■

Corolario 4.3.3. *Si $\mathcal{X}$ y φ son como en el Corolario 4.3.2, entonces, para toda sucesión minimizante de φ, $\{u_k\} \subset \mathcal{X}$ existe una sucesión minimizante $\{v_k\} \subset \mathcal{X}$ tal que*

$$\begin{aligned} &\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k) \\ &\|u_k - v_k\|_{\mathcal{X}} \to 0 \quad k \to \infty \\ &\|\varphi'(v_k)\|_{\mathcal{X}'} \to 0 \quad k \to \infty \end{aligned}$$

Demostración. Si $\varphi(u_k) \to c = \inf_{\mathcal{X}} \varphi$ consideremos $\varepsilon_k = \varphi(u_k) - c$ si es positivo, y $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ si $\varphi(u_k) = c$. Para ε_k tomamos la correspondiente v_k que da el Corolario 4.3.2. ■

En el sentido del Corolario previo hallamos *casi mínimo* para φ. El problema ahora es hallar *casi puntos críticos* de diferentes tipos, por ejemplo *de tipo paso de la montaña* en el sentido de [3]. Este es el contenido de la próxima sección.

Queremos hacer énfasis en como el principio variacional de Ekeland separa el aspecto geométrico del problema de hallar puntos críticos de funcionales, del aspecto topológico o analítico del problema, el cual, en general, necesitará además alguna propiedad de compacidad.

4.4. El Teorema del Paso de la Montaña

En esta sección damos una demostración basada en el principio variacional de Ekeland del clásico *Teorema del Paso de la Montaña* de Ambrosetti y Rabinowitz. (Véase [3]).

Precisaremos la notación.

$(H1)$ $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach, $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ un espacio métrico compacto, y $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ un cerrado.

$(H2)$

$$\chi : \mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{X}$$

función continua.

$(H3)$ Definimos
$$\mathcal{M} = \{g \in \mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathcal{X}) : g(s) = \chi(s), s \in \mathcal{K}_0\}.$$

Llamamos *subdifferential* de la norma en $\mathcal{X}$ a

$$\partial\|x_0\| = \{p \in \mathcal{X}' : \|x_0\| - \|x\| \leq p(x_0 - x), \forall x \in \mathcal{X}\}$$

donde $\mathcal{X}'$ es el espacio dual $\mathcal{X}$.

Usaremos el resultado siguiente

Lema 4.4.1. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, entonces para la norma,*

$$\|\cdot\| : \mathcal{X} \to I\!R,$$

tenemos
$$\partial\|x_0\| = \{p \in \mathcal{X}' : p(x_0) = \|x_0\|, \|p\|_{\mathcal{X}'} = 1\}$$

Demostración. Dado $x_0 \in \mathcal{X}$, por el teorema de Hahn-Banach, existe $p \in \mathcal{X}'$ tal que $p(x_0) = \|x_0\|$ and $\|p\|_{\mathcal{X}'} = 1$. Para tal p tenemos

$$p(x - x_0) = p(x) - p(x_0) \leq \|p\|_{\mathcal{X}'}\|x\| - \|x_0\| \leq \|x\| - \|x_0\|,$$

así $\|x_0\| - \|x\| \leq p(x_0 - x)$, por tanto, $p \in \partial\|x_0\|$. Reciprocamente si $p \in \partial\|x_0\|$, obtenemos

$$\|x_0\| - \|x\| \leq p(x_0 - x) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Y en particular para $x = \lambda x_0$, $\lambda > 0$, encontramos $\|x_0\|(1-\lambda) \leq (1-\lambda)p(x_0)$, por tanto $(p(x_0)-\|x_0\|)(1-\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in I\!R^+$. Entonces $p(x_0) = \|x_0\|$. Además $\|x_0\| - \|x\| \leq p(x_0) - p(x) \leq \|x_0\| - p(x)$ implica $p(x) < \|x\|$ y entonces $\|p\|_{\mathcal{X}'} \leq 1$; puesto que $p(x_0) = \|x_0\|$, $\|p\|_{\mathcal{X}'} = 1$. ∎

Corolario 4.4.2. *Sea $\mathcal{C}(\mathcal{K}, I\!R)$ con la norma del supremo. Denotemos por $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ las medidas de Radon en $\mathcal{K}$. Entonces*

$$\partial\|f\|_\infty = \{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K}) : \mu \geq 0, \int_{\mathcal{K}} d\mu = 1,\ sop(\mu) \subset \{t : f(t) = \|f\|_\infty\}\}.$$

Demostración. Por el Lema 4.4.1 tenemos

i) Si las condiciones se satisfacen entonces $\|\mu\| = 1$ y

$$\int_{\mathcal{K}} f(x) d\mu = \|f\|_\infty \int_{\mathrm{sop}\mu} d\mu = \|f\|_\infty,$$

ii) Si $\|\mu\| = 1$ y $\int_{\mathcal{K}} f(x)d\mu = \|f\|_\infty$ entonces $\mu > 0$, y

$$\mathrm{sop}(\mu) \subset \{s |\, f(s) = ||f||_\infty\}.$$

∎

Teorema 4.4.3. *Consideremos $\mathcal{X}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{M}$ como en $(H1)$, $(H2)$ y $(H3)$. Sea $u : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ un funcional verificando:*

1) u es continuo,

2) u es diferenciable Gateaux y, además,

$$u' : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}'$$

es continuo de la topología fuerte a la débil-$*$.

Si

$$\begin{cases} \alpha & = \inf_{\varphi\in\mathcal{M}} \max_{s\in\mathcal{K}} u(\varphi(s)) \\ \alpha_1 & = \max_{\chi(\mathcal{K}_0)} u, \end{cases}$$

y se verifica que $\alpha > \alpha_1$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\varphi \in \mathcal{M}$ tal que $\max_{s\in\mathcal{K}} u(\varphi(s)) \leq \alpha + \varepsilon$ existe $v_\varepsilon \in \mathcal{X}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon &\leq u(v_\varepsilon) \leq \max_{s\in\mathcal{K}} u(\varphi(s)) \\ d(v_\varepsilon, \varphi(\mathcal{K})) &\leq \varepsilon^{1/2} \\ \|u'(v_\varepsilon)\| &\leq \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Demostración. Podemos suponer que $0 < \varepsilon < \alpha - \alpha_1$. Sea $\varphi \in \mathcal{M}$ verificando

$$\max_{s\in\mathcal{K}} u(\varphi(s)) \leq \alpha + \varepsilon.$$

Definamos

$$I : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad \text{por} \quad I(c) = \max_{s\in\mathcal{K}} u(c(s))$$

para $c \in \mathcal{M}$. Por hipótesis $\alpha = \inf_{c\in\mathcal{M}} I(c) > \alpha_1$. Además I es inferiormente semicontinuo, porque si $\|c_k - c\|_\infty \to 0$ tenemos

$$I(c) = u(c(s_0)) = \lim_{k\to\infty} u(c_k(s_0)) \leq \lim_{k\to\infty} I(c_k).$$

Por el principio variacional de Ekeland aplicado a $I : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, dados $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in \mathcal{M}$ tales que $I(\varphi) \leq \alpha+\varepsilon$ existe $c_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tal que

(i) $I(c_\varepsilon) \leq I(\varphi) \leq \alpha + \varepsilon$.

(ii) $I(c) \geq I(c_\varepsilon) - \varepsilon^{1/2}\|c - c_\varepsilon\|_\infty$ si $c \in \mathcal{M}$.

(iii) $\|c_\varepsilon - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon^{1/2}$.

Consideremos $\gamma : \mathcal{K} \to \mathcal{X}$ tal que $\gamma(\mathcal{K}_0) = 0$. Para $h \neq 0, h \in \mathbb{R}$ por (ii) concluimos que $I(c_\varepsilon+\gamma h)-I(c_\varepsilon) \geq -\varepsilon^{1/2}|h|\|\gamma\|_\infty$, es decir,

$$\frac{1}{|h|} I(c_\varepsilon + \gamma h) - I(c_\varepsilon) \geq -\varepsilon^{1/2}\|\gamma\|_\infty.$$

Por definición de I,

$$\begin{aligned} &I(c_\varepsilon + \gamma h) - I(c_\varepsilon) = \max u(c_\varepsilon + \gamma h) - \max u(c_\varepsilon) \\ &= \max_{s\in\mathcal{K}}\{u(c_\varepsilon(s)) + h\langle u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\rangle + o(h)\} - \max_{s\in\mathcal{K}} u(c_\varepsilon(s)). \end{aligned}$$

Por simplicidad de escritura, ponemos

$$f(s) = u(c_\varepsilon(s)) \ \text{ y } \ g(s) = \langle u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\rangle.$$

Tenemos por hipótesis que $f \in \mathcal{C}(\mathcal{K}, I\!R)$; también $g \in \mathcal{C}(\mathcal{K}, I\!R)$ porque,

a) Por el Teorema de Banach-Alaoglu, $\partial\|f\|_\infty$ es débil-$*$ compacto.

b) Por hipótesis, si $v_n \to v$ en $\mathcal{X}$ entonces

$$\langle u'(v_n), y\rangle \to \langle u'(v), y\rangle$$

para todo $y \in \mathcal{X}$.

c) Si $u'(v_n) \rightharpoonup u'(v)$ débil-$*$ en $\mathcal{X}'$ y $y_n \to y$ en $\mathcal{X}$, entonces

$$\langle u'(v_n), y_n\rangle \to \langle u'(v), y\rangle, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Las desigualdades anteriores pueden expresarse como sigue,

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon^{1/2}\|\gamma\|_\infty \leq \text{lím}_{h\to 0}\frac{1}{h}\{I(c_\varepsilon + h\gamma) - I(c_\varepsilon)\}\\
&= \text{lím}_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\|(f+hg)\|_\infty - \|f\|_\infty\}\\
&\leq \sup\{\textstyle\int_0^1 gd\mu : \mu \in \partial\|f\|_\infty\}.
\end{aligned}$$

Definimos $F : \partial\|f\|_\infty \to I\!R$ por $F(\mu) = \int_K gd\mu$ y consideramos una sucesión convergente débil-$*$ $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ en $\partial\|f\|_\infty$, entonces

$$F(\mu_n) = \int_{\mathcal{K}} gd\mu_n \to \int_{\mathcal{K}} gd\mu = F(\mu),$$

por tanto, el supremo es alcanzado. Como consecuencia tenemos

$$-e^{1/2}\|\gamma\|_\infty \leq \text{máx}\{\int_{\mathcal{K}}\{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\}d\mu : \mu \in \partial\|f\|_\infty\}.$$

Consideramos $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathcal{X}) : \gamma(s) = 0 \text{ if } s \in \mathcal{K}_0, \|\gamma\|_\infty \leq 1\}$. Entonces,

$$-\varepsilon^{1/2} \leq -\varepsilon^{1/2}\|\gamma\|_\infty \leq \inf_{\gamma\in\Gamma}\{\text{máx}\{\int_{\mathcal{K}}\{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\}d\mu : \mu \in \partial\|f\|_\infty\}\}.$$

Tomamos $\{\mu_n(\gamma)\} \subset \partial\|f\|_\infty$ tal que fijado γ,

$$\int_{\mathcal{K}}\{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\}d\mu_n(\gamma) \longrightarrow M(\gamma),\ n \to \infty$$

donde

$$M(\gamma) = \max_{u\in\partial\|f\|_\infty}\{\int_{\mathcal{K}}\{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\}d\mu\},$$

Entonces eligiendo una sucesión conveniente que converja débil-$*$ $\mu_n(\gamma) \rightharpoonup \mu(\gamma)$ tenemos

$$\int_{\mathcal{K}} \{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\} d\mu(\gamma) = M(\gamma).$$

Y por el Lema 4.4.2,

$$-\varepsilon^{1/2} \leq \inf_{\gamma\in\Gamma} M(\gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_{\mathcal{K}} \{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\} d\mu(\gamma) \leq$$

$$\max_{\mu\in\partial\|f\|_\infty} \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_{\mathcal{K}} \{u'(c_\varepsilon(s)), \gamma(s)\} d\mu = \max_{\mu\in\partial\|f\|_\infty} (-\int_{\mathcal{K}} \|u'(c_\varepsilon(s))\|_{\mathcal{X}'} d\mu) =$$

$$-\min\{\|u'(c_\varepsilon(s))\|_{\mathcal{X}'} : s \in \{t\in\mathcal{K} : u(c_\varepsilon(t)) = \|f\|_\infty\}\}$$

Es decir,

$$\min_{s\in\{t\in\mathcal{K}:u(c_\varepsilon(t))=\|f\|_\infty\}} \|u'(c_\varepsilon(s))\|_{\mathcal{X}'} \leq \varepsilon^{1/2}.$$

En otros términos, existe $s_\varepsilon \in \mathcal{K}$ tal que, si $v_\varepsilon = c_\varepsilon(s_\varepsilon)$, entonces:

i) $u(v_\varepsilon) = \max_{s\in\mathcal{K}} u(c_\varepsilon(s)) = I(c_\varepsilon) \leq \inf I + \varepsilon^{1/2}$,

ii) $\|u'(v_\varepsilon)\| \leq \varepsilon^{1/2}$,

iii) $u(v_\varepsilon) \geq \alpha_1$,

iv) $d(v_\varepsilon, \varphi(\mathcal{K})) \leq \varepsilon^{1/2}$.

■

La condición clásica de compacidad es la *condición de Palais-Smale* que formalizamos en la siguiente definición.

Definición 4.4.4. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y $U : \mathcal{X} \longrightarrow I\!R$ un funcional diferenciable Gateaux. U verifica la condición de Palais-Smale en el nivel $c \in I\!R$ si y soño si para toda sucesión $\{x_k\} \subset \mathcal{X}$ verificando*

i) $U(x_k) \to c$ cuando $k \to \infty$,

ii) $U'(x_k) \to 0$ en $\mathcal{X}'$ para $k \to \infty$,

existe una subsucesión $x_{k_j} \to x$ en $\mathcal{X}$.

Una subsucesión verificando i) y ii) es llamada una sucesión de Palais-Smale para U.

Con estas nociones podemos formular el *Teorema del Paso de la Montaña.*

Teorema 4.4.5. *Sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach y $U : \mathcal{X} \to I\!R$ funcional continuo verificando:*

i) U es diferenciable Gateaux,

ii) U' es continua de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{X}'$ con la topología débil-$*$.

Se supone que existen $u_0, u_1 \in \mathcal{X}$, y una bola B_r, centrada en u_0 y de radio r tal que si $u_1 \in \mathcal{X} - B_r$ y si $|x - u_0| = r$ entonces

$$\inf_{\partial B_r} U(x) > \max\{U(u_0), U(u_1)\}$$

Sea

$$\Gamma = \{g \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{X}) : g(0) = u_0, g(1) = u_1\}$$

y

$$c = \inf_{f \in \Gamma} \sup_{s \in [0,1]} U(f(s)).$$

Si U satisface la condición de Palais-Smale para el nivel c, entonces c es un valor crítico para U y $c > \max\{U(u_0), U(u_1)\}$.

Demostración. Tomamos $\mathcal{K} = [0,1]$, $\mathcal{K}_0 = \{0,1\}$, $\chi(0) = u_0$, $\chi(1) = u_1$ and $\mathcal{M} = \Gamma$; puesto que $c_0 = \inf_{\partial B_r} U(x) > \max\{U(u_0), U(u_1)\} = c_1$ y puesto que todo camino $g \in \Gamma$ tiene intersección no vacía con ∂B_r, el Teorema 4.4.3 implica que dada una sucesión $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$, podemos hallar una sucesión $\{x_k\} \subset \mathcal{X}$ tal que

a) $U(x_k) \to c$,

b) $U'(x_k) \to 0$,

y entonces por la condición de Palais-Smale para el nivel c, existe una subsucesión tal que:

$$c = \lim_{k \to \infty} U(x_k) = U(x),$$

$$0 = \lim_{k \to \infty} U'(x_k) = U'(x).$$

Es decir, x es un punto crítico en el nivel c. ∎

4.5. El Problema de Dirichlet con potencial singular

El primer resultado de esta sección es una consecuencia directa de la desigualdad de Hardy.

Lema 4.5.1. *Consideremos el operador*

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv -\Delta_p u - \frac{\lambda}{|x|^p}|u|^{p-2}u \tag{4.4}$$

in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces

1. *Si $\lambda \leq \lambda_{N,p}$, $\mathcal{L}_\lambda$ es un operador positivo.*

2. *Si $\lambda > \lambda_{N,p}$, $\mathcal{L}_\lambda$ no es acotado inferiormente.*

Demostración. 1) Por la desigualdad de Hardy es obvio. 2) Como consecuencia de la optimalidad de la constante y un argumento de densidad dan la existencia de $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que $\langle \mathcal{L}_\lambda \phi, \phi\rangle < 0$. Podemos suponer que $||\phi||_p = 1$ y entonces definiendo $u_\mu(x) = \mu^{N/p}\phi(\mu x)$ tenemos $||u_\mu||_p = 1$ por la homogeneidad del operador que $\langle \mathcal{L}_\lambda u_\mu, u_\mu\rangle = \mu^p \langle \mathcal{L}_\lambda \phi, \phi\rangle < 0$. ■

Teniendo en cuenta el resultado anterior, estudiaremos el problema siguiente.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\lambda u &= f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega),\ x \in \Omega,\ \lambda < \lambda_{N,p},\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1 \\ u(x) &= 0,\ x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

donde $\Omega \subset I\!\!R^N$ es un dominio acotado. Si $0 \notin \Omega$ entonces tenemos un problema con potencial acotado, para el que se aplica la teoría clásica de operadores elípticos quasi-lineales.

Supondremos de aquí en adelante que estamos en el caso difícil, es decir, $0 \in \Omega$, de forma que el potencial, no solo no es acotado, sino que no pertenece a $L^{N/p}$. Por esta razón diremos que el problema (4.5) es crítico cuando $0 \in \Omega$.

Para iniciar el planteamiento variacional, consideramos el funcional de energía,

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)dx$$

donde $F(x, u, \xi) = \dfrac{1}{p}|\xi|^p - \dfrac{\lambda}{p}\dfrac{u^p}{|x|^p} - f(x)u$.

Como hemos visto en el Capítulo 2, el Teorema de De Giorgi, caracteriza la semicontinuidad débil inferior de J en términos de la convexidad de $F(x, u, \bullet)$ y una estimación inferior conveniente para F.

Sin embargo, en nuestro caso estas hipótesis de acotación inferior de F no son satisfechas.

Planteamiento Variacional .- El funcional de energía,

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega \frac{u^p}{|x|^p}dx - \int_\Omega f\,u dx,$$

por la desigualdad de Hardy, es continuo, diferenciable Gateaux y coercivo, es decir, existen $\gamma > 0$ y $c \in I\!\!R$ tales que

$$J(u) \geq \gamma \int_\Omega |\nabla u|^p dx - c.$$

Pero no podemos aplicar el teorema de De Giorgi para saber si J es débilmente inferiormente semicontinuo. Por tanto, trataremos de resolver el problema (4.5) siguiendo una estrategia distinta. Nos encontramos con hipótesis suficientes para aplicar el *principio variacional de Ekeland* y así, existe una sucesión $\{u_n\}_{n\in I\!\!N}$ tal que

$$J(u_n) \to \text{ínf}\, J, \text{ y } J'(u_n) \to 0, \text{ cuando}\, n \to \infty.$$

Es decir, $\{u_n\}_{n\in I\!\!N}$ is una sucesión de Palais-Smale. La coercividad de J implica la acotación de $\{u_n\}$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces tenemos que para alguna subsucesión:

i) $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ en L^p, *ii)* u_n converge en L^p y puntualmente,

iii) $\lambda \dfrac{u_n^{p-1}}{|x|^p}$ son medidas de Radon acotadas que convergen débilmente en L^1.

Bajo estas hipotesis podemos aplicar el siguiente teorema de convergencia debido a Boccardo y Murat. Los resultados probados por Boccardo y Murat son mucho más generales de lo que nosotros necesitamos, véase [7] para los detalles. Nosotros establecemos el resultado tal como lo necesitamos.

Lema 4.5.2. *Sea* $\{u_n\}_{n\in I\!N}$ *verificando los problemas*

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta_p u_n = g_n + f_n, \quad en \;\; \Omega \\ u_n \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{array}\right. \tag{4.6}$$

Supongamos que,

1) $u_n \rightharpoonup u$ *débilmente en* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $u_n \to u$ *en* $L^p(\Omega)$.

2) $f_n \to f$ *en* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

3) $g_n \rightharpoonup g$ *débil-$*$ en el sentido de las medidas.*

Entonces, $\nabla u_n \to \nabla u$ *en* $(L^q(\Omega))^N$ *para* $1 < q < p$.

Además si 3) *es reemplazado por*

3′) $g_n \rightharpoonup g$ *débil-$*$ en* $L^1(\Omega)$,

entonces

$$\mathcal{T}_k(u_n) \to \mathcal{T}_k(u) \quad en \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

para todo $k > 0$, *donde* $\mathcal{T}_k(s) = s$ *si* $|s| \le k$ *y* $\mathcal{T}_k(s) = ks/|s|$ *si* $|s| \ge k$.

Demostración. Tomamos como función test $\mathcal{T}_k(u_n - u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces

$$\begin{array}{l} \int\limits_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle dx = \\ -\int\limits_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle dx + \langle g_n, \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle + \langle f_n, \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle \end{array} \tag{4.7}$$

fijo k, por 1) tenemos que

$$\langle f_n, \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle \to 0$$

y

$$\int\limits_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle dx \to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Por 2) se tiene $|\langle g_n, \mathcal{T}_k(u_n-u)\rangle| \le Ck$.

Entonces fijo k obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \mathcal{T}_k(u_n - u)\rangle dx \leq Ck.$$

Las desigualdades para el p-laplaciano obtenidas en el Capítulo 1 implican que

$$e_n(x) = \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla \mathcal{T}_k(u_n - u)\rangle$$

son no negativos y uniformemente acotados en $L^1(\Omega)$. Tomamos $0 < \theta < 1$ y dividimos Ω como sigue,

$$S_n^k = \{x \in \Omega|\, |u_n - u| \leq k\},\;\; G_n^k = \{x \in \Omega|\, |u_n - u| > k\}.$$

La desigualdad de Hölder da la siguiente estimación,

$$\begin{array}{l} \int\limits_\Omega e_n^\theta dx = \int_{S_n^k} e_n^\theta dx + \int_{G_n^k} e_n^\theta dx \leq \\ \left(\int_{S_n^k} e_n dx\right)^\theta |S_n^k|^{1-\theta} + \left(\int_{G_n^k} e_n dx\right)^\theta |G_n^k|^{1-\theta}. \end{array}$$

Ahora, fijo k, $|G_n^k| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por la acotación uniforme en L^1 obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega e_n^\theta dx \leq (Ck)^\theta |\Omega|^{1-\theta},$$

y tomando límite para $k \to 0$ se tiene que $e_n^\theta \to 0$ fuertemente en L^1. Para terminar la primera parte usamos las desigualdades para el p-laplaciano y se concluye sin dificultad.

Si ahora suponemos $3')$, ta idea es obtener el mismo tipo de estimación pero con $\theta = 1$. Tomamos como función test $\mathcal{T}_k(u_n - u)$ y procedemos de manera similar. Remitimos al lector a [7] para los detalles.

■

En nuestro contexto el Lema 4.5.2 puede leerse como sigue.

Lema 4.5.3. *Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verificando (i), (ii) y (iii) por el Principio Variacional de Ekeland. Entonces para alguna subsucesión,*

$$u_{n_j} \to u, \quad en \quad W_0^{1,q}(\Omega),\; q < p$$

y

$$\mathcal{T}_k(u_n) \to \mathcal{T}_k(u) \quad in \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

para todo $k > 0$, donde $\mathcal{T}_k(s) = s$ si $|s| \leq k$ y $\mathcal{T}_k(s) = ks/|s|$ si $|s| \geq k$.

De acuerdo con el Lemma 4.5.3, y por un argumento de densidad, probamos la requerida propiedad de compacidad

Llamaremos a tal propiedad de compacidad *condición singular de Palais-Smale* en el sentido del siguiente Lema:

Lema 4.5.4. *Consideremos $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Palais-Smale obtenida antes.*

Entonces $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición singular Palais-Smale, es decir, existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{n_j} \to u, \quad en \quad W_0^{1,q}(\Omega),\ q < p.$$

Una consecuencia inmediata del Lema (4.5.4) es que u es una solución de nuestro problema en el sentido de distribuciones. Además, por densidad, y puesto que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, concluimos que u es solución en el sentido de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente la homogeneidad del problema implica que u es un mínimo para J. En efecto,

$$J(u_k) - \frac{1}{p}\langle J'(u_k), u_k\rangle = (\frac{1}{p} - 1)\int_\Omega f u_k,$$

donde en el último término podemos pasar al límite por la convergencia débil en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}&\inf J = \lim_{k\to\infty} J(u_k) = \lim_{k\to\infty}(J(u_k) - \frac{1}{p}\langle J'(u_k), u_k\rangle) = \\ &(\frac{1}{p} - 1)\int_\Omega f u = J(u) - \frac{1}{p}\langle J'(u), u\rangle = J(u).\end{aligned}$$

Notemos que el método seguido termina por resolver el problema de minimización. Si no se dispone de la homogeneidad no se tiene un Teorema general de minimización, si bien hay resultados parciales obtenidos por L. Boccardo.

También es interesante notar que este método será usado en las secciones siguientes para estudiar problemas que tienen funcionales que no son acotados inferiormente.

Nota 4.5.5. *La unicidad es obvia en el caso lineal, $p = 2$. En este mismo caso es fácil probar que la sucesión de minimizantes converge fuertemente en $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Si $p > 2$ la unicidad no es en general cierta como prueba el siguiente argumento (véase [13]). Sea $B \subset \Omega$ una bola y consideremos $u_0 \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$ tal que $u = k > 0$ en B. Sea $f(x) = \mathcal{L}_\lambda u$ con $\lambda < \lambda_{N,p}$. De esta forma $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ y entonces podemos hallar una solution v por minimizacion de J por el método estudiado. Pero es claro que $v \neq u_0$, porque u_0 no puede ser un mínimo para J: en efecto, como $p > 2$, vemos que

$$\langle J''(u_0)z, z\rangle = (p-1)\left(\int_\Omega |\nabla u_0|^{p-2}|\nabla z|^2 dx - \lambda\int_\Omega \frac{|u_0|^{p-2}}{|x|^p} z^2 dx\right).$$

En particular si $z \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es tal que $supp\,(z) \subset B$,

$$\langle J''(u_0)z, z\rangle = -\lambda(p-1)\int_\Omega \frac{|u_0|^{p-2}}{|x|^p} z^2 dx < 0,$$

y entonces u_0 no es un mínimo de J.

El caso $1 < p < 2$ tampoco verifica la unicidad como ha puesto de manifiesto Xiao Zhong usando desigualdades de Hardy con peso.

La convergencia fuerte de la sucesión de Palais-Smale es desconocida si $p \neq 2$.

4.6. Funcionales no acotados con potenciales

En esta sección nos ocuparemos de estudiar brevemente algunos resultados para funcionales que poseen la *geometría del Teorema del Paso de la Montaña* y que tienen la dificultad añadida de tener un potencial crítico en el sentido de las secciones anteriores. Dejamos al margen el caso elemental y bien conocido en que el crecimiento del término de orden cero es *subcrítico* en el sentido de la inclusión de Sobolev y, a la vez, el potencial pertenece a algún L^r con $r \geq N/p$, cuando $1 < p < N$. Nos ocuparemos entonces de

- Potencial crítico y crecimiento subcrítico.
- Potencial subcrítico y crecimiento crítico.
- Potencial crítico y crecimiento crítico.

4.6.1. Potencial crítico y crecimiento subcrítico

En este apartado estudiaremos el sigiente problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u|x|^{-p} + |u|^{\alpha-2}u, \quad x \in \Omega, \quad \lambda < \lambda_{N,p} \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

donde $1 < p < N$, $p < \alpha < Np/(N-p)$ y $\Omega \subset I\!\!R^N$ es tal que $0 \in \Omega$. Si el potencial $\dfrac{\lambda}{|x|^p}$ es sustituido por otro w tal que $w \in L^r$, $r \geq N/p$ el problema es bien conocido. Véase por ejemplo [35] y las referencias allí contenidas. Esta es la razón de suponer $0 \in \Omega$.

El funcional asociado a (4.8) es

$$J(u) \equiv \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda}{p}\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx - \frac{1}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha dx,$$

que como puede comprobarse de forma elemental no es acotado.

Se tiene el resultado siguiente.

Teorema 4.6.1. *Consideremos el problema de Dirichlet (4.8). Entonces existe al menos una solución positiva $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Como $\lambda < \lambda_{N,p}$ entonces,

$$J(u) \equiv \frac{1}{p}\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \dfrac{\lambda}{p}\textstyle\int_\Omega \dfrac{|u|^p}{|x|^p} dx - \dfrac{1}{\alpha}\textstyle\int_\Omega |u|^\alpha dx \geq$$

$$\gamma \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx - C(p,\alpha)(\textstyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx)^{q/p},$$

y así es inmediato ver que $J(0) = 0$ es un mínimo local para J y que $J(tu_0) \to -\infty$ si $t \to \infty$, es decir, tenemos las propiedades geométricas para aplicar el Teorema del Paso de la Montaña. Mas precisamente, si $J(t_0u_0) < 0$, consideramos,

$$\Gamma = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) |\, \gamma(0) = 0,\, \gamma(1) = t_0u_0\},$$

y

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} J(\gamma(s)),$$

nivel del *paso de la montaña* definido por Ambrosetti-Rabinowitz. Por el principio de Ekeland podemos hallar una sucesión de Palais-Smale $\{u_j\}$ tal que:

i) $J(u_j) \to c$

ii) $J'(u_j) \to 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Es fácil comprobar que $\{u_j\}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Usando otra vez el Lema 4.5.3, obtenemos que $\{u_j\}$ satisface la *condición singular de Palais Smale* definida en la sección anterior. Como consecuencia podemos encontrar una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_j \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,q}(\Omega)$ con $q < p$, y como consecuencia es una solución de (4.8) en sentido de distribuciones. Puesto que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, por densidad obtenemos que u es una solución débil. Finalmente, por homogeneidad, y teniendo en cuenta la convergencia fuerte en L^α, vemos que $u \not\equiv 0$. En efecto,

$$c = \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \lim_{n\to\infty} (J(u_n) - \frac{1}{p}\langle J'(u_n), u_n\rangle) =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha}) \int_\Omega |u_n|^\alpha dx = (\frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha}) \int_\Omega |u|^\alpha dx,$$

como queriamos probar. ■

4.6.2. Potencial subcrítico y crecimiento crítico

Probaremos en este apartado y en el siguiente que el potencial $\lambda|x|^{-p}$ es crítico en el sentido de la falta de compacidad del funcional de energía asociado.

Como contraste consideraremos el potencial $\lambda|x|^{-q}$ con $0 < q < p$ más precisamente consideraremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{p-2}u|x|^{-q} + |u|^{\alpha-2}u, \quad \lambda < \lambda_{N,p}\,,\ \alpha = Np/(N-p), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

y donde p y Ω son como en el apartado anterior.

Como el potencial $\lambda|x|^{-q}$ pertenece a L^r para algún $r > N/p$, es sabido que existe un primer autovalor aislado y simple, λ_1, para el correspondiente problema de Dirichlet. Véase [15]. Mostraremos que el efecto que produce este potencial es similar al caso de una constante ($q = 0$), en el sentido que la falta de compacidad aparece solo por el orden de orden cero de mayor orden. Además en este caso aparece también el fenómeno de las *malas dimensiones* de Brezis-Nirenberg (véase [9]), $p < N < p^2 - (p-1)q$, como en el caso autónomo. Obsérvese que el intervalo de dimensiones coincide con lo conocido para el caso $q = 0$ y decrece cuando $q \to p$, desapareciendo la solución si $q = p$, de acuerdo con lo que veremos en el Lema 4.6.3.

Teorema 4.6.2. *Consideremos el problema de Dirichlet (4.9). Si $N \geq p^2 - (p-1)q$, entonces existe al menos una solución positiva, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Los argumentos son similares a los de [20] y por esta razón seremos breves. La geometría del funcional de energía J, satisface los requerimientos del Teorema del Paso de la Montaña, lo que puede ser comprobado por los mismos cálculos que en el Teorema 4.6.1. Entonces, por el *método de concentracion-compacidad* de P.L. Lions, see [28], obtenemos una condición local de Palais-Smale. Más precisamente, si S es la constante óptima de la inclusión de Sobolev y si $\{u_k\}$ es una sucesión de Palais-Smale tal que,

$$J(u_k) \to c < \frac{S^{N/p}}{N}, \; J'(u_k) \to 0, \quad \text{en } W^{-1,p'}(\Omega)$$

entonces admite una subsucesión convergente. El punto a comprobar es que existe una sucesión de Palais-Smale tal que $J(u_k) \to c < \dfrac{S^{N/p}}{N}$. Para obtener esta sucesión particular es bien conocido que basta hallar una dirección $v_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para la cual

$$\sup_{t>0} J(tv_\varepsilon) < c_0 < \frac{S^{N/p}}{N}, \tag{4.10}$$

pues de esta forma el valor minimax crítico en el Teorema del Paso de la Montaña verifica $c < c_0$. Como en [20] tomamos $v_\varepsilon = u_\varepsilon ||u_\varepsilon||_{p^*}^{-1}$ donde $u_\varepsilon = \phi U_\varepsilon$, U_ε son los minimizantes de la inclusion de Sobolev y $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ es una función de corte con soporte adaptado a Ω. Tenemos las estimaciones

$$\|\nabla v_\varepsilon\|_p^p = S + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) \tag{4.11}$$

$$||v_\varepsilon||_\alpha^\alpha = \begin{cases} C_1 \varepsilon^{\frac{p-1}{p}(N - \alpha \frac{(N-p)}{p})} + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}(N-\alpha\frac{(N-p)}{p})}), \; \alpha > p^*(1-\frac{1}{p}) \\ C_1 \varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}\alpha} |\log \varepsilon| + o(\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}\alpha} |\log \varepsilon|), \; \alpha = p^*(1-\frac{1}{p}) \\ C_1 \varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}\alpha} + o(\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}\alpha}), \; \alpha < p^*(1-\frac{1}{p}), \end{cases} \tag{4.12}$$

y

$$\int_\Omega \frac{v_\varepsilon^p}{|x|^q} dx \approx \begin{cases} c_2 \varepsilon^{\frac{p^2-(p-1)q-p}{p}} \text{ if } N > p^2 - (p-1)q, \\ c_2 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} |\log \varepsilon| \text{ if } N = p^2 - (p-1)q, \\ c_2 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} \text{ if } N < p^2 - (p-1)q. \end{cases}$$

Siguiendo la prueba del Teorema 3.3 en [20], el decaimiento de $\varepsilon \to 0$ de $||\nabla v_\varepsilon||_p^p$ debe ser más rápido que el decaimiento de $\int_\Omega \dfrac{v_\varepsilon^p}{|x|^q} dx$, para obtener la desigualdad (4.10). Esto es cierto si $N \geq p^2 - (p-1)q$ lo que conluye la demostración. ■

4.6.3. Potencial y crecimientos críticos

Utilizaremos el método desarrollado por Pohozaev para probar que el problema de Dirichlet con exponente crítico de Sobolev no se regulariza por el término $|x|^{-p} u^{p-1}$. Es decir, en un dominio estrellado el problema *doblemente crítico* no tiene solución. En este sentido, el siguiente resultado de no existencia prueba, desde un punto de vista diferente, el caracter crítico del crecimiento del potencial.

Lema 4.6.3. *Consideremos el problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda \dfrac{u^{p-1}}{|x|^p} + \gamma f(u), \qquad x \in \Omega,\ \lambda > 0, \\ u(x) &= 0, \qquad\qquad\qquad en \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.13}$$

donde $\Omega \subset I\!R^N$ es acotado, estrellado con respecto al origen, f es una función continua y

$$\gamma(NF(u) - \frac{N-p}{p} u f(u)) \leq 0, \quad F(u) = \int_0^u f(s) ds.$$

Entonces (4.13) no tiene solución positiva en $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Usamos una identidad de tipo Pohozaev. La idea consiste en multiplicar la ecuacion por $\langle x, \nabla u \rangle$ e integrar por partes. Resulta,

$$\begin{array}{l} (\dfrac{p-1}{p}) \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p \langle x, \nu \rangle d\sigma + (\dfrac{N-p}{p}) \int_\Omega |\nabla u|^p dx = \\ \lambda (\dfrac{N-p}{p}) \int_\Omega \dfrac{u^p}{|x|^p} dx + \gamma N \int_\Omega F(u) dx, \end{array}$$

donde ν es la normal exterior a $\partial\Omega$. Por otra parte, multiplicando la ecuación por u e integrando,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \lambda \int_\Omega \frac{u^p}{|x|^p} dx + \gamma \int_\Omega u f(u) dx. \tag{4.14}$$

Ambas identidades dan

$$(\frac{p-1}{p}) \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^p \langle x, \nu \rangle d\sigma = \gamma \int_\Omega (NF(u) - \frac{N-p}{p} u f(u)) dx.$$

La conclusión ahora es obvia. ∎

Nota 4.6.4. *La regularidad de u en el Lema previo no basta para justificar los cálculos directamente, pero, como Pohozaev apunta en [36] los resultados son válidos también para soluciones débiles; un argumento de aproximación que justifica la afirmación previa puede verse en [25]. Ver también [38].*

Nota 4.6.5. *En el caso $\Omega = I\!R^N$, $p = 2$ y $f(u) = u^{(N+2)/(N-2)}$ un resultado de existencia puede verse en [28], Th.I.3, pg. 179.*

Notemos el contraste del Lema 4.6.3 con los resultados en los artículos [9] [31] en el caso $p = 2$, y en [20] para $p \neq 2$, en los cuales se considera el caso autónomo.

En nuestro caso tenemos un término perturbativo no compacto y entonces, a pesar del crecimiento en u, no se obtiene, en general, regularización alguna.

Bibliografía

[1] A. Ambrosetti, *Critical points and nonlinear variational problems.* Memoire No 49, Societe Mathematique de France Tome 120, Fascicule 2, 1992.

[2] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer of Nonlinear Analysis.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics No 34, Cambridge University Press, 1995.

[3] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications.* Jour. Funct. Anal. Vol 14 (1973), 349-381.

[4] G. Arioli, F. Gazzola, *Some results on p-Laplace equations with a critical growth term* Research Report in Mathematics No 14, 1996. Dept. Math. Stockholm University.

[5] J.F.G. Auchmuty, R. Beals, *Variational Solutions of Some Nonlinear Free Boundary Problems* Arch. Rat. Mech. Anal. Vol 43 (1971), 255-271.

[6] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear Elliptic Equations with right hand side measures.* Commun. in P.D.E. Vol 17 No 3,4 (1992), 641-655.

[7] L. Boccardo, F. Murat, *Almost Everywhere Convergence of the Gradients of Solutions to Elliptic and Parabolic Equations.* Nonlinear Analysis T.M.A. Vol 19 No 6 (1992), 581-597.

[8] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle. Théorie et Applications.* Ed. Masson, 1983.

[9] H. Brezis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents* Comm. Pure App. Math. 36 (1983), 437-477.

[10] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag, 1989.

[11] E. De Giorgi, *Teoremi di semicontinuita nel calcolo delle variazioni.* Ins. Naz. di Alta Matematica, Roma 1968.

[12] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e analitizità delle estremali degli integrali multipli regolari* Mem. Accad. Sci. Torino (Classe di Sci. mat. fis. e nat.) 3 (1957) 25-43.

[13] M. Del Pino, M. Elgueta, R. Manasevich, *A Homotopic Deformation along p of a Leray-Schauder Degree Result and existence for* $(|u'|^{p-2}u') + f(t,u) = 0, \quad u(0) = u(T) = 0$ Journal of Differential Equations, 80 (1989), 1-13.

[14] E. Di Benedetto, $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Analysis. Theory, Methods y Applications Vol 7, No 8 (1983), 827-850.

[15] P. Drábek, A. Kufner, F. Nicolosi, *Nonlinear Elliptic Equations Singular and Degenerate Case.* Publications of University of West Bohemia, 1996. (To appear in *De Gruyter Series in Nonlinear Analysis* in 1997).

[16] I. Ekeland, *On the variational principle.* J. Math. Anal.Appl. Vol 47 (1974), 324-353.

[17] I. Ekeland, R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels* Dunod, 1974.

[18] C. L. Fefferman, *The uncertainty principle* Bull A.M.S. Vol 9, No 2 (1983), 129-206.

[19] A. Friedman, *Variational Principles and Free-Boundary Problems.* R. E. Krieger Publishing Co. 1988.

[20] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a non-symmetric term.* Transactions of the Amer. Math. Soc. 323 No 2 (1991), 877-895.

[21] J. Garcia, I. Peral, *Hardy Inequalities y some Critical Elliptic and Parabolic Problems.* Jou. on Diff. Equations. 144 (1998) 441-476.

[22] M. Giaquinta, E Giusti, *On the regularity of the minima of variational integrals*, Acta Math. 148 (1982), 31-46.

[23] D. Gilbarg, N.S. Trudinger *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* Springer-Verlag, 1983.

[24] E. Giusti, *Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni.* Unione Matematica Italiana, 1994.

[25] M. Guedda, L. Veron, *Quasilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents.* Nonlinear Anal TMA Vol 13 No 8 (1989), 879-902.

[26] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities.* Cambridge University Press, 1934

[27] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic equations.* Academic Press, 1968.

[28] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1* Rev. Matemática Iberoamericana Vol 1 No 1 (1985), 145-201.

[29] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 2.* Rev. Matemática Iberoamericana Vol 1 No 2 (1985), 45-121.

[30] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems* Springer Verlag, 1989

[31] F. Merle, L.A. Peletier, *Positive solutions of elliptic equations involving supercritical growth* Proc. of the Royal Soc. Edinburgh Vol 118 A (1991), 49-62.

[32] J. Moser, *A new proof of the De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations* Comm. Pure Appl. Math., 14 (1960) 259-273.

[33] J. Moser, *Om Harnack's theorem for elliptic differential equations* Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961) 577-591.

[34] J. Nash *Continuity of solution of parabolic and elliptic equations* Amer. J. of Math. 80 (1958), 931-954.

[35] I. Peral, *Some Results on Quasilinear Elliptic Equations: Growth versus Shape,* Proceedings of the Second International School in Nonlinear Analysis and Differential Equations, Editor A. Ambrosetti, Trieste, Italy, 1998 (Aparecerá).

[36] S.I. Pohozaev, *Eigenfunctions of the equation* $\Delta u + \lambda f(u)$ Soviet Math. 5 (1965), 1408-1411.

[37] S. Pohozaev, *On the Eigenfunctions of Quasilinear Elliptic Problems,* Mat. Sbornik Vol 82 (124) No 2 (1970), 171-188.

[38] P. Pucci, J. Serrin, *The structure of the critical set in the mountain pass theorem* Trans. A.M.S. 299 (1987), 115-132

[39] J. Serrin, *On a fundamental theorem of the calculus of variations.* Acta Math. Vol 102 (1959), 1-32.

[40] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear elliptic equations.* Acta Math. Vol 111 (1964), 247-302.

[41] G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus.* Les Presses de L'Universite de Montreal, 1966.

[42] L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* Zanichelli, 1921

[43] P. Tolksdorff, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations* Jou. of Diff. Equations Vol 51 (1984), 126-150

[44] K. Yosida, *Functional Analysis* Springer-Verlag, 1974.

[45] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1977