Ejercicios de Teoría de Números para las Navidades 2009

Problema 1. a) (fácil) Demostrar que $\log m.c.m.\{1,\ldots,n\} \sim n$.

b) (difícil) Hallar el comportamiento asintótico de

$$\log m.c.m.\{1,6,\ldots,5n+1\}.$$

c) (bastante más difícil) Demostrar que

$$\log m.c.m.\{1^2+1,\ldots,n^2+1\} \sim n\log n.$$

Problema 2. Sea μ la función de Moebius y $M(x) = \sum_{n\le x}\mu(n)$.

a) Utilizar la fórmula de sumación de Abel para demostrar que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}}dt$$

para todo s con $\Re(s) > 1$.

b) Demostrar que $\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 1 \\ 1, & \text{si } n = 1 \end{cases}$.

c) Utilizar b) para demostrar que para todo s con $\Re(s) > 1$ se cumple que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}\sum_m \frac{1}{m^s} = 1$$

d) Utilizar a) y c) para demostrar que si $M(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $\zeta(s) \neq 0$ para $\Re(s) > 1/2$.

Problema 3. a) Demostrar que para todo polinomio $f(x) = ax^2+bx+c,\ a \neq 0$ existen infinitos primos p para los que la congruencia $f(x) \equiv 0 \pmod p$ tiene solución.

b) Dar condiciones necesarias y suficientes para que la congruencia $f(x) \equiv 0 \pmod p$ tenga soluciones.

c) (difícil). Sea $s(f,p^k)$ el número de soluciones de la congruencia $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Hallar $s(f,p^k)$ en función de a,b,c cuando p es un primo impar.

Problema 4. a) Hallar las soluciones en enteros positivos de la ecuación diofántica

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}, \qquad (x, y, z) = 1.$$

Problema 5. Sea $r(n) = \#\{(k, j) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : \ k^2 + 2j^2 = n\}$ y $R(x) = \sum_{n \le x} r(n)$.

a) Demostrar que $R(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} x + O(\sqrt{x})$.

b) Demostrar que

$$\sum_{\substack{1 \le k^2 + 2j^2 \le x \\ k, j \in \mathbf{Z}}} \frac{1}{k^2 + 2j^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log x + C + O(x^{-1/2})$$

para alguna constante C.

Problema 6. a) Sea $\alpha = \sum_k 7^{-7^k}$. Utilizar el teorema de Liouville para demostrar que el número $\beta = \alpha^6 + 2\alpha^5 - 3\alpha^3 + 5\alpha + 1$ es un número irracional.

b) Hallar una fórmula asintótica para $\sum_{1 \le n \le x} (\beta n)^2$, donde (βn) es la parte fraccionaria de βn.

Problema 7. a) Sea g una raíz primitiva módulo p. Demostrar que el conjunto $A = \{(x, g^x) : \ x \in \mathbf{Z}_{p-1}\}$ es un conjunto de $p - 1$ elementos en $\mathbf{Z}_{p-1} \times \mathbf{Z}_p$.

b) Describir explícitamente un conjunto de Sidon de $p-1$ elementos en el intervalo $[1, p(p-1)]$.

c) Encontrar un entero positivo N, lo más pequeño que podáis, tal que el intervalo $\{1, \dots, N\}$ contenga un conjunto de Sidon de 10 elementos.