Exámen de Teoría de Números

2 de Febrero de 2009

Problema 1. Sea $M_n = [1, 2, \ldots, n]$, el mínimo común múltiplo de los n primeros enteros positivos.

a) (0,5 puntos) Demostrar que

$$M_n = \prod_p p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]}$$

donde el producto recorre los números primos.

b) (0.5 puntos) Demostrar que $\log M_n \le \pi(n) \log n$.

c) (0.5 puntos) Demostrar las desigualdades siguientes para todo α, $1/2 < \alpha < 1$:

$$\log M_n \ge \sum_{n^\alpha < p \le n} \log p \ge \alpha \log n \, (\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \ge \alpha\pi(n)\log n - \alpha n^\alpha \log n$$

d) (0.5 punto) Utilizar el teorema del número primo y los apartados b) y c) para demostrar que

$$\alpha \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \le 1$$

para todo $\alpha < 1$ y concluir que $\log M_n \sim n$.

Solución: a) La máxima potencia p^k que aparece en $1, 2 \ldots, n$ corresponde al mayor entero no negativo k tal que $p^k \le n$. Es decir, el mayor entero positivo k tal que $k \le \log n / \log p$. Por lo tanto $k = [\log n / \log p]$.

b) Tomando logaritmos en la expresión de arriba,

$$\log M_n = \sum_p [\frac{\log n}{\log p}] \log p = \sum_{p \le n} [\frac{\log n}{\log p}] \log p \le \sum_{p \le n} \frac{\log n}{\log p} \log p = \log n \sum_{p \le n} 1 = \pi(n) \log n$$

c) Observemos que si $\alpha > 1/2$ entonces $[\log n / \log p] = 1$. Por lo tanto

$$M_n \ge \prod_{n^\alpha < p \le n} p^{[\frac{\log n}{\log p}]} = \prod_{n^\alpha < p \le n} p$$

Tomando logaritmos,

$$\log M_n \ge \prod_{n^\alpha < p \le n} \log p \ge \log(n^\alpha) \sum_{n^\alpha < p \le n} 1 = \alpha \log n \, (\pi(n) - \pi(n^\alpha)) \, .$$

Para la última desigualdad utilizamos simplemente que $\pi(n^\alpha) \le n^\alpha$.

d)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \le \limsup_{n\infty} \frac{\pi(n)\log n}{n} = 1$$

por el teorema del número primo. Para el límite inferior,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \geq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{\alpha\pi(n)\log n}{n} - \frac{\alpha \log n}{n^{1-\alpha}} \right\} = \alpha$$

debido de nuevo al teorema del número y al hecho de que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\epsilon} = 0$ para todo $\epsilon > 0$.

Finalmente, como $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \geq \alpha$ para todo $\alpha < 1$ se tiene que necesariamente $\liminf_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \geq 1$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} = 1$.

Problema 2. Sea μ la función de Moebius y $M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n)$.

a) (0.5 puntos) Utilizar la fórmula de sumación de Abel para demostrar que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

para todo s con $\Re(s) > 1$.

b) (0.5 puntos) Demostrar que $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 1 \\ 1, & \text{si } n = 1 \end{cases}$.

c) (0.5 puntos) Utilizar b) para demostrar que para todo s con $\Re(s) > 1$ se cumple que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_m \frac{1}{m^s} = 1$$

d) (1 punto) Utilizar a) y c) para demostrar que si $M(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $\zeta(s) \neq 0$ para $\Re(s) > 1/2$.

Solución: a) Utilizamos la formula de sumación de Abel para para obtener

$$\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{M(x)}{x^s} + s\int_1^x \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

Como $|M(x)| \leq x$ y $\Re(s) > 1$, al tomar el límite cuando $x \to \infty$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^s} + s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt = s\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

b) La función μ es multiplicativa y por lo tanto la función $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ también lo es. Entonces es suficiente con evaluar g en las potencias de los primos. Pero $g(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \mu(p^2) + \cdots \mu(p^k) = 1 - 1 + 0 + \cdots 0 = 0$.

Es decir, $g(n) = 0$ excepto cuando $n = 1$, y en ese caso $g(1) = \mu(1) = 1$.

c) Observar que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_m \frac{1}{m^s} = \sum_{m,n} \frac{\mu(n)}{(mn)^s} = \sum_r \frac{\sum_{n|r} \mu(n)}{r^s} = 1$$

d) Por los apartados a) y c) tenemos que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^{\infty} \frac{M(t)}{t^{s+1}}dt$$

para $\Re(s) > 1$. Pero la integral define una función analítica siempre que la integral sea absolutamente convergente. Es claro que es absolutamente convergente cuando $\Re(s) > 1$, pero si $M(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$, también lo es cuando $\Re(s) > 1/2+\epsilon$. Es decir, la función $\frac{1}{\zeta(s)}$ es una función analítica en $\Re(s) > 1/2+\epsilon$, por lo que la función $\zeta(s)$ no se puede anular en $\Re(s) > 1/2+\epsilon$.

Como estamos asumiendo que eso ocurre para todo $\epsilon > 0$, entonces la función $\zeta(s)$ no se puede anular en s si $\Re(s) > 1/2$.

Problema 3. (2 puntos) Caracterizar los primos para los que la congruencia $3x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod p$ tiene solución.

Solución: Si $p = 2$ la congruencia es equivalente a $x^2 \equiv 0 \pmod 2$, que claramente tiene solución. Si $p = 3$ la congruencia es equivalente a $2x + 2 \equiv 0 \pmod 3$ que también tiene solución. Si $p \neq 3$, la ecuación es equivalente a

$$3(3x^2 + 2x + 2) \equiv 0 \pmod p \iff (3x+1)^2 \equiv -5 \pmod p$$

Es decir, la congruencia tendrá solución para los primos $p > 3$ tales que $(-5/p) \neq -1$. Por otra parte,

$$\left(\frac{-5}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right)(-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right)$$

Como $\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 \text{ si } p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$ y $\left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \equiv 1 \text{ ó } 4 \pmod 5 \\ -1 \text{ si } p \equiv 2 \text{ ó } 3 \pmod 5 \\ 0 \text{ si } p = 5 \end{cases}$,

tenemos finalmente, como consecuencia del teorema chino del resto, que

$$\left(\frac{-5}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \equiv 1,3,7,9 \pmod{20} \\ -1 \text{ si } p \equiv 11,13,17,19 \pmod{20} \\ 0 \text{ si } p = 5 \end{cases}$$

Problema 4. (2 puntos) a) Hallar las soluciones en enteros positivos de la ecuación diofántica

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}, \qquad (x,y,z) = 1.$$

Pista: Escribir $x = rx',\ y = ry'$ donde $r = (x,y)$.

Solución: Le ecuación es equivalente a $(x+y)z = xy$. Si escribimos $x = rx',\ y = ry'$ donde $r = (x,y)$ tenemos que $(x',y') = 1$ y la ecuación se transforma en $(x'+y')z = rx'y'$. Como $(x'+y',x') = 1$ y $(x'+y',y') = 1$ entonces tanto x' como y' dividen a z y como $(x',y') = 1$ entonces también $x'y'$ divide a z. Si escribimos $z = x'y'z'$, tenemos que $r = (x'+y')z'$. Como z' es un divisor de r también lo es de x y de y. Pero como estamos suponiendo que $(x,y,z)=1$ entonces $z'=1$. Finalmente tenemos que las soluciones son de la forma

$$\begin{cases} x=(x'+y')x' \\ y=(x'+y')y' \\ z=x'y' \end{cases}$$

con $(x',y')=1$.

Problema 5. a) (0.5 puntos) Demostrar que $\sum_{k\geq n}\dfrac{1}{7^{7^k}}\leq\dfrac{2}{7^{7^n}}$

b) (1 punto) Sea $\alpha=\sum_k 7^{-7^k}$. Utilizar el teorema de Liouville para demostrar que el número $\beta=\alpha^6+2\alpha^5-3\alpha^3+5\alpha+1$ es un número irracional.

c) (1 punto) Hallar una fórmula asintótica para $\sum_{1\leq n\leq x}(\beta n)^2$, donde (βn) es la parte fraccionaria de βn.

Solución: a)

$$\sum_{k\geq n}\frac{1}{7^{7^k}}=\frac{1}{7^{7^n}}+\frac{1}{7^{7^{n+1}}}+\frac{1}{7^{7^{n+2}}}+\cdots=\frac{1}{7^{7^n}}+\frac{1}{\left(7^{7^n}\right)^7}+\frac{1}{\left(7^{7^n}\right)^{7^2}}+\cdots$$
$$\leq\frac{1}{7^{7^n}}+\frac{1}{\left(7^{7^n}\right)^2}+\frac{1}{\left(7^{7^n}\right)^3}+\cdots=\frac{\frac{1}{7^{7^n}}}{1-\frac{1}{7^{7^n}}}\leq\frac{2}{7^{7^n}}$$

b) El teorema de Liouville afirma que si α es una solución de un polinomio de grado $r\geq 2$ entonces existe una constante C tal que $|\alpha-p/q|>\frac{C}{q^r}$ para todo racional p/q.

Consideremos las fracciones $\frac{p_n}{q_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^{7^k}}$. Como el mínimo común múltiplo de los denominadores es 7^{7^n} entonces $q_n\leq 7^{7^n}$. Tenemos entonces que

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{7^{7^k}}\leq\frac{2}{7^{7^{n+1}}}\leq\frac{2}{q_n^7}.$$

Por otra parte, si β fuera racional, α sería un cero de un polinomio de grado 6 y por el teorema de Liouville existiría una constante $C>0$ tal que

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\geq\frac{C}{q_n^6}$$

lo que es una contradicción porque $q_n\to\infty$.

c) Como β es irracional, la sucesión $a_n=(\beta n)$ está uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1)$ y por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}f(a_n)=\int_0^1 f(t)dt$ para toda función continua f. En particular ocurrirá para la función $f(t)=t^2$ y por tanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}(\beta n)^2=\int_0^1 t^2dt=1/3.$$

Es decir, $\sum_{n\le x}(\beta n)^2 \sim x/3$.

Problema 6. a) (1 punto) Demostrar que $|A+B| \ge |A|+|B|-1$ para todo par de conjuntos de enteros A, B.

b) (1 punto) Utilizar a) para demostrar que si A contiene algún número par y algún número impar y todos los elementos de B son pares entonces

$$|A+B| \ge |A| + 2|B| - 2.$$

Solución: a) Sean $a_1 < \cdots < a_j$ los elementos de A, y $b_1 < \cdots < b_k$ los elementos de B. Observemos simplemente que los $j+k-1$ elementos

$$a_1+b_1 < a_1+b_2 < \cdots < a_1+b_k < a_2+b_k < \cdots < a_j+b_k$$

están todos en $A+B$ y son distintos.

b) Escribimos $A = 2\cdot A_0 \cup (2\cdot A_1+1)$ y $B = 2\cdot B'$. Entonces

$$\begin{aligned}
|A+B| = |(2\cdot A_0 \cup (2\cdot A_1+1)) + B| &= |(2\cdot A_0 + 2\cdot B') \cup (2\cdot A_1 + 1 + 2\cdot B')| \\
&= |2\cdot A_0 + 2\cdot B'| + |2\cdot A_1 + 1 + 2\cdot B'| = |A_0+B'| + |A_1+B'| \\
&\ge |A_0| + |B'| - 1 + |A_1 + |B'| - 1 = |A| + 2|B| - 2
\end{aligned}$$