Exámen de Teoría de Números

2 de Febrero de 2009

Hacer 5 de los 6 problemas. Se aprueba con un total de cinco puntos.

Problema 1. Sea $M_n = [1, 2, \ldots, n]$, el mínimo común múltiplo de los n primeros enteros positivos.

a) (0,5 puntos) Demostrar que

$$M_n = \prod_p p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]}$$

donde el producto recorre todos los números primos.

b) (0.5 puntos) Demostrar que $\log M_n \leq \pi(n) \log n$.

c) (0.5 puntos) Demostrar las desigualdades siguientes para todo $\alpha > 1/2$:

$$\log M_n \geq \sum_{n^\alpha < p \leq n} \log p \geq \alpha \log n \left(\pi(n) - \pi(n^\alpha)\right) \geq \alpha \pi(n) \log n - \alpha n^\alpha \log n$$

d) (0.5 punto) Utilizar el teorema del número primo y los apartados b) y c) para demostrar que

$$\alpha \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n} \leq 1$$

para todo $\alpha < 1$ y concluir que $\log M_n \sim n$.

Problema 2. Sea μ la función de Moebius y $M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n)$.

a) (0.5 puntos) Utilizar la fórmula de sumación de Abel para demostrar que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{s+1}} dt$$

para todo s con $\Re(s) > 1$.

b) (0.5 puntos) Demostrar que $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 1 \\ 1, & \text{si } n = 1 \end{cases}$.

c) (0.5 puntos) Utilizar b) para demostrar que para todo s con $\Re(s) > 1$ se cumple que

$$\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_m \frac{1}{m^s} = 1$$

d) (1 punto) Utilizar a) y c) para demostrar que si $M(x) = O(x^{1/2+\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $\zeta(s) \neq 0$ para $\Re(s) > 1/2$.

Problema 3. (2 puntos) Caracterizar los primos para los que la congruencia $3x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ tiene solución.

Problema 4. (2 puntos) a) Hallar las soluciones en enteros positivos de la ecuación diofántica

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}, \qquad (x, y, z) = 1.$$

Pista: Escribir $x = rx'$, $y = ry'$ *donde* $r = (x, y)$.

Problema 5. a) (0.5 puntos) Demostrar que $\sum_{k \geq n} \frac{1}{7^{7^k}} \leq \frac{2}{7^{7^n}}$

b) (1 punto) Sea $\alpha = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{7^{7^k}}$. Usar el teorema de Liouville para probar que el número $\beta = \alpha^6 + 2\alpha^5 - 3\alpha^3 + 5\alpha + 1$ es un número irracional.

c) (1 punto) Hallar una fórmula asintótica para $\sum_{1 \leq n \leq x} (\beta n)^2$, donde (βn) es la parte fraccionaria de βn.

Problema 6. a) (1 punto) Demostrar que $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$ para todo par de conjuntos de enteros A, B.

b) (1 punto) Utilizar a) para demostrar que si A contiene algún número par y algún número impar y todos los elementos de B son pares, entonces

$$|A + B| \geq |A| + 2|B| - 2.$$