Exámen de Teoría de Números

8 de mayo de 2015

Hacer 5 de los 6 problemas. La puntuación es sobre 10 puntos.

Problema 1. Sea $s = \sigma + it$ con $\sigma > 1$ y $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

a) (0,5 puntos) Demostrar que $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

b) (0,5 puntos) Demostrar que $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

c) (0.5 puntos) Demostrar que $\frac{1}{|\zeta(s)|} \leq \zeta(\sigma)$.

d) (0.5 puntos) Deducir de lo anterior que $\zeta(s) \neq 0$ para $\sigma > 1$.

Problema 2. Sea $s(n) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

a) (0.5 puntos) Demostrar que $s(n) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

b) (0.5 puntos) Demostrar que $\sum_{n \leq x} s(n) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\log x)$.

c) (1 punto) Demostrar que $\sum_{n \leq x} \frac{s(n)}{n} = \frac{\log x}{\zeta(2)} + C + O((\log x)/x)$ para una constante C.

Problema 3. a) (0.5 puntos) Demostrar que para $p \neq 3$ primo, la congruencia $3x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod p$ es equivalente a la congruencia $(3x + 1)^2 \equiv -5 \pmod p$.

b) (0.5 puntos) Demostrar que para $p = 2, 3, 5$ la congruencia $3x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod p$ tiene una única solución.

b) (1 puntos) Hallar, para cada primo $p \neq 2, 3, 5$, el número de soluciones de la congruencia $3x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod p$.

Problema 4. a) (1 punto) Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 = 7z^2$ no tiene soluciones en enteros excepto la solución $x = y = z = 0$.

b) b) (1 punto) Hallar el número de soluciones en enteros positivos de la ecuación $x^2 - y^2 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15$.

Problema 5. Sea $l(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m \leq n} \frac{1}{(\alpha m)+1}$, donde (αm) es la parte fraccionaria de αm. Hallar $l(\alpha)$ para

a) (1 punto) $\alpha = 1/\sqrt{p}$, con p primo. b) (1 punto) $\alpha = 1/p$, con p primo.

Problema 6. a) (1 puntos) Demostrar que si A es un conjunto de Sidon en $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$, entonces $|A| \leq p$

b) (1 punto) Demostrar que si $p \neq 2$ es primo, el conjunto $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbf{Z}_p\}$ es un conjunto de Sidon en $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ con p elementos.