Exámen de Teoría de Números

30 de junio de 2015

Hacer 5 de los 6 problemas. La puntuación es sobre 10 puntos.

Problema 1. Para $s > 1$ sea $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

a) (0,5 puntos) Demostrar que $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

b) (0,5 puntos) Demostrar que $\zeta(s) = \zeta(2s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)$.

c) (1 punto) Utilizar el apartado b) y la desigualdad $\log(1+t) \leq t$ para $t \geq 0$ para demostrar que la suma de los inversos de los números primos es infinita.

Problema 2. Sea M un entero positivo.

a) (1 punto) Hallar una fórmula asintótica para $|\{n \leq x : \ (n, M) = 1\}$

b) (1 punto) Demostrar que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,M)=1}} \frac{1}{n} = c_1 \log x + c_2 + O(1/x)$$

donde c_1 y c_2 son constantes que dependen de M.

Problema 3.

a) (1 punto) Demostrar que existen infinitos primos de la forma $4n + 3$.

b) (1 punto) Demostrar que existen infinitos primos de la forma $4n + 1$.

Problema 4. a) (2 puntos) Parametrizar todas las ternas de enteros positivos en progresión aritmética; es decir, aquellas ternas (x, z, y) tales que $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Problema 5.

a) (1 punto) Demostrar que el número e es irracional.

b) (1 punto) Hallar el valor del límite

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \cos^2(2\pi\sqrt{2}n).$$

Problema 6.

a) (1 punto) Demostrar que si A es un conjunto de Sidon en $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$, entonces $|A| \leq p$

b) (1 punto) Demostrar que si $p \neq 2$ es primo, el conjunto $A = \{(x, x^2) : \ x \in \mathbf{Z}_p\}$ es un conjunto de Sidon en $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ con p elementos.