Capítulo 6

La distribución de los números primos

En este capítulo estudiaremos la función $\pi(x)$ que cuenta el número de primos menores o iguales que x, y haremos énfasis en la fórmula asintótica

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

que es conocida como "teorema de los números primos".

En el capítulo 1 vimos la formulación equivalente

$$\Psi(x) \sim x \text{ o } \lim_{x\to\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1,$$

en términos de la función de Chebychev

$$\Psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$$

que resulta más conveniente porque la función Ψ tiene propiedades más sencillas de desvelar por medios analíticos.

La teoría que vamos a considerar fue esbozada por B. Riemann en una maravillosa memoria del año 1860 titulada"Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grosse". En tan sólo ocho páginas Riemann exhibe las profundas conexiones que existen entre Ψ y la función ζ de la variable compleja $s = \sigma + i\tau$. En particular, el teorema de los números primos es una consecuencia de la no anulación de la función ζ en la línea vertical $\sigma = 1$ y fue demostrado, independientemente, por J. Hadamard y C.J, de la Vallée Poussin, más de 30 años después de la aparición del trabajo de B. Riemann.

Existe una realación explícita entre la estimación de la diferencia $\Psi(x) - x$ y los ceros de la función ζ en la banda $0 \leq \sigma \leq 1$.

Riemann formuló la hipótesis de que estos ceros estásn situados precisamente en le línea vertical $\sigma = 1/2$. Esta conjetura es uno de los problemas más famosos de las Matemáticas y posee una rica, y a veces pintoresca, historia.

A diferencia de los capítulos anteriores donde, en general no hemos necesitado más que "métodos elementales"que incolucran a lo sumo, al cálculo diferencial de una variable real, este capítulo necesita la teoría de funciones analíticas y algunas propiedades de la transformada de Fourier. Ello no debe extrañarnos, por cuanto el estudio de la distribución de los números primos fue uno de los motores que propulsó el desarrollo de la teoría de funciones y del análisis armónico, dando lugar a teorías a la vez profundas y bellas.

En torno al año 1950 A. Selberg y P. Erdős encontraron una demostración elemental de la ley asintótica, es decir, sin el recurso a la teoría de funciones analíticas. En este capítulo vamos a presentar la demostración clásica siguiendo el camino indicado por B. Riemann, y supondremos al lector familiarizado con la variable compleja.

6.0.1. La función ζ de Riemann y el Teorema de los números primos

Recordemos que Euler introdujo la función $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, definida para todo real $s > 1$ para demostrar la existencia de infinitos primos como consecuencia de la divergencia de la serie armónica $\sum_n \frac{1}{n}$.

En lo sucesivo usaremos la notación tradicional de la Teoría de los Números y designaremos con las letras σ y τ a las partes real e imaginaria, respectivamente, del número complejo s.

Siguiendo a Riemann, conviene extender el dominio de ζ al semiplano complejo $\Re(s) = \sigma > 1$, donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es absolutamente convergente y define a una función analítica. En este semiplano también es cierta la identidad de Euler que conecta la sucesión de todos los enteros positivos con la de los números primos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

La demostración es idéntica a aquella que presentamos en el capítulo 1 para s real, $s > 1$.

Tomando logaritmos en la identidad anterior y utilizando el desarrollo en serie de Taylor de la función

$$\log(1-z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m},$$

valido en $|z| < 1$, obtenemos

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m}\frac{1}{p^{ms}}. \tag{6.1}$$

Si derivamos término a término la identidad anterior, obtenemos que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \sum_{m\geq 1} \frac{\log p}{p^{ms}}.$$

Recordando que la función de Mangoldt está definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \text{ si } n = p^m \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

podemos escribir la identidad

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

6.0.2. El teorema del número primo

El teorema del número primo consiste en establecer la ley asintótica $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$, que como vimos en el primer capítulo, es equivalente a $\Psi(x) \sim x,\ x \to \infty$.

Teorema 6.0.1 (Teorema de los números primos)**.** *$\Psi(x) \sim x$ cuando $x \to \infty$.*

Por razones que se verán más adelante conviene introducir la función primitiva

$$\Psi_1(x) = \int_0^x \Psi(t)dt = \sum_{n\leq x} (x-n)\Lambda(n).$$

Lema 6.0.2. *Si $\Psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ entonces $\Psi(x) \sim x$.*

Demostración. Dado $c > 1$, por ser $\Psi(t)$ creciente tenemos la desicualdad

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\leq \frac{1}{(c-1)x}\int_x^{cx}\Psi(t)dt = \frac{1}{(c-1)x}\left(\Psi_1(cx)-\Psi_1(x)\right)\\ &= \frac{1}{(c-1)x}\left(\frac{(cx)^2}{2}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = x\frac{c+1}{2}+o(x).\end{aligned}$$

Para todo $c > 1$ se tiene que

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\Psi(x)}{x} \leq \frac{c+1}{2},$$

y esto es cierto para todo $c > 1$. Tomando el límite cuando $c \to 1$, obtenemos finalmente que $\limsup_{x\to\infty}\frac{\Psi(x)}{x} \leq 1$. Un argumento similar, pero con $c < 1$, permite demostrar que $\liminf_{x\to\infty}\frac{\Psi(x)}{x} \geq 1$. □

Nuestro objetivo es entonces demostrar que $\lim_{x\to\infty}\frac{\Psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. En el lemma 6.0.4 obtendremos una formula explícita para $\Psi_1(x)$ donde aparece involucrada la función ζ. Pero antes necesitamos un lema técnico.

Lema 6.0.3. *Dados $c > 0$, $y > 0$ y $k \geq 1$ tenemos que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds = \begin{cases}0, & si\ 0 \leq y \leq 1\\ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^k, & si\ y > 1.\end{cases}$$

Demostración. Es un sencillo cálculo de residuos. Consideremos la circunferencia de radio R, muy grande, centrada en el origen. La recta vertical $\sigma = c$ corta a la circunferencia en dos puntos $c \pm iT(R)$ y la divide en dos arcos, uno más grande a la izquierda al que llamaremos Γ_R^1 , y otro más pequeño a la derecha, al que llamaremos Γ_R^2. Conviene hacerse un dibujo.

Si $0 < y \leq 1$ consideramos el recinto cuya frontera es Γ_R^2 y el trozo de recta vertical $c \pm iT(R)$.

Como la función $\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds$ es analítica en ese recinto, su integral a lo largo de la frontera es cero, luego

$$\int_{c-iT(R)}^{c+iT(R)}\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds = -\int_{\Gamma_R^2}\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds.$$

Pero cuando $s \in \Gamma_R^2$ tenemos la estimación

$$\left|\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}\right| \leq \frac{y^c}{R(R-1)\cdots(R-k)} \ll \frac{1}{R^{k+1}}.$$

Por lo tanto
$$\left|\int_{\Gamma_R^2} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds\right| \ll \frac{1}{R^k}$$
y
$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} = \lim_{R\to\infty}\int_{c-iT(R)}^{c+iT(R)} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds = 0.$$

Si $y > 1$ consideramos el recinto cuya frontera es Γ_R^1 y el trozo de recta vertical $c \pm iT(R)$. En este recinto, si R es suficientemente grande, la función tiene polos en $j = 0, -1, \ldots, -k$. Tenemos entonces
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT(R)}^{c+iT(R)} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R^1} \frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}ds$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+k)}, -j\right) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j y^{-j}}{j!(k-j)!} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^k.$$

La demostración finaliza observando que la integral $\int_{\Gamma_R^1} \to 0$ por las mismas razones que en el caso anterior. □

Lema 6.0.4. *Para todo $c > 1$ tenemos la fórmula*
$$\frac{\Psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)ds.$$

Demostración. Dado $c > 1$, utilizamos el lema 6.0.3 para escribir
$$\begin{aligned}\frac{\Psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\left(1-\frac{n}{x}\right)\Lambda(n) = \frac{1}{x} &= \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(x/n))^s}{s(s+1)}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left\{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds\right\}ds.\end{aligned}$$

El lema 6.0.3 también nos da
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\frac{1}{s-1}ds = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2.$$

Basta entonces con restar las dos identidades para demostrar el lema. Observemos que la hipótesis $\Re(s) > 1$ implica que todas las series y las integrales consideradas son absolutamente convergentes. □

Los lemas 6.0.2 y 6.0.4 nos muestran el teorema del número primo es equivalente a demostrar que para cualquier $c > 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \int_{c-i\infty}^{c+\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right) ds = 0.$$

Examinemos este límite. La línea de integración $s = c + i\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$ permite sacar el factor x^{c-1} fuera de la integral, pero $x^{c-1} \to \infty$ si $c > 1$.

Una estrategia natural consiste en trasladar la línea de integración a la línea $c = 1$. Pero para hacerlo necesitamos conocer mejor las propiedades de la función $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \dfrac{1}{s-1}$: analiticidad y crecimiento en un entorno de esa línea, ausencia de ceros de ζ en $1 + i\tau$, etc..

Supongamos por un momento que podemos trasladar la línea de integración a $s = 1 + i\tau$ y escribir la integral en la forma siguiente después de hacer el cambio $s = 1 + i\tau$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau \log x} h(\tau) d\tau = \hat{h}(-\log x),$$

donde

$$h(\tau) = \frac{1}{(1+i\tau)(2+i\tau)} \left\{ -\frac{\zeta'(1+i\tau)}{\zeta(1+i\tau)} - \frac{1}{i\tau} \right\}.$$

Si además demostramos que h es integrable, el Teorema de Riemann-Lebesgue nos dará entonces

$$\lim_{x\to\infty} \hat{h}(-\log x) = 0$$

y, por tanto,

$$\Psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}, \qquad x \to \infty.$$

En lo que resta del capítulo nos dedicaremos a probar los pasos necesarios para completar esta estrategia.

Observar primero que los posibles polos de $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ van a venir de los polos y de los ceros de $\zeta(s)$. En efecto, si $\zeta(s)$ tiene un polo o un cero en $s = s_0$ podemos escribir $\zeta(s) = (s - s_0)^k g(s)$ con $k \neq 0$, $g(s)$ analítica en s_0 y tal que $g(s_0) \neq 0$. Tomando logaritmos y derivando obtenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{k}{s - s_0} + \frac{g'(s)}{g(s)},$$

que tiene un polo en $s = s_0$ de residuo k.

El único polo de la función ζ se analiza en el siguiente lema.

Lema 6.0.5. *La función ζ tiene una extensión al semiplano $\Re(s) > 0$, como una función meromorfa cuya única singularidad, situada en $s = 1$, es un polo simple de residuo igual a* 1.

Demostración. La fórmula de sumación de Abel nos permite escribir

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}=\frac{[x]}{x^s}+s\int_1^x\frac{[y]}{y^{s+1}}dy=\frac{[x]}{x^s}+s\int_1^x\frac{1}{y^s}dy-s\int_1^x\frac{\{y\}}{y^{s+1}}dy \tag{6.2}$$

$$=\frac{s}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{\{y\}}{y^{s+1}}dy+\frac{[x]}{x^s}-\frac{sx^{-s}}{s-1}+s\int_x^\infty\frac{\{y\}}{y^{s+1}}dy \tag{6.3}$$

si $\Re(s) > 1$. Y si hacemos tender x a infinito obtenemos

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^\infty\frac{\{y\}}{y^{s+1}}dy \tag{6.4}$$

que es una función meromorfa con un sólo polo en $s = 1$ con residuo 1. □

La función ζ no va a tener ceros en la región $\sigma \ge 1$. El caso fácil $\sigma > 1$ se analiza en el siguiente lema y el caso $\sigma = 1$ está recogido en el apartado 4) del lema 6.0.7.

Lema 6.0.6. *Si $\sigma > 1$ entonces $\zeta(s) \ne 0$.*

Demostración.

$$\frac{1}{|\zeta(s)|}=\prod_p\left|1-\frac{1}{p^s}\right|\le\prod_p\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right)\le\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\sigma}=\zeta(\sigma)<\infty. \tag{6.5}$$

□

Lema 6.0.7. *La función ζ verifica las estimaciones siguientes.*

1) En la región $\sigma \ge 1$, $|\tau| \ge 2$:

$$|\zeta(\sigma+i\tau)|\ll\log|\tau|.$$

2) En la región $1/2 < 1-\rho \le \sigma < 1$, $|\tau| \ge 2$:

$$|\zeta(\sigma+i\tau)|\ll\frac{|\tau|^\rho}{\rho}.$$

3) En la región $\sigma \geq 1$, $|\tau| \geq 3$:

$$|\zeta'(\sigma + i\tau)| \ll \log^2 |\tau|.$$

4) Para todo τ se cumple que $\zeta(1 + i\tau) \neq 0$.

5) En la región $\sigma \geq 1$, tenemos

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + i\tau)|} \ll \log^7 |\tau|.$$

Demostración. Observemos primero que si $\sigma > 0$ y $s \neq 1$, las fórmulas 6.2 y 6.4 nos dan la expresión

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} - \frac{[x]}{x^s} + \frac{s}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}} - s\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt. \tag{6.6}$$

1) Si $\sigma \geq 2$, tenemos que $|\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma) \leq \zeta(2) = \pi^2/6$.

Si $1 \leq \sigma < 2$, los sumandos de la parte derecha de (6.6) los podemos acotar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s}\right| &\leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \ll \log x \\
\left|\frac{[x]}{x^s}\right| &\leq x^{1-\sigma} \leq 1 \\
\left|\frac{s}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}}\right| &\leq \frac{\sigma + |\tau|}{|\tau|} x^{1-\sigma} \leq \frac{2 + |\tau|}{|\tau|} = \frac{2}{|\tau|} + 1 \leq 2 \\
\left|s\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt\right| &\leq (\sigma + |\tau|)\int_x^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \leq (2 + |\tau|)\int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{2 + |\tau|}{x}.
\end{aligned}$$

Tomando $x = |\tau|$ obtenemos la estimación deseada.

2) En este caso las estimaciones son

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s}\right| &\leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^{1-\rho}} \ll \frac{x^\rho}{\rho} \\
\left|\frac{[x]}{x^s}\right| &\leq x^{1-\sigma} \leq x^\rho \\
\left|\frac{s}{s-1}\frac{1}{x^{s-1}}\right| &\leq \frac{\sigma + |\tau|}{|\tau|} x^{1-\sigma} \leq \frac{1 + |\tau|}{|\tau|} x^\rho \leq \frac{3}{2} x^\rho \\
\left|s\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt\right| &\leq (1 + |\tau|)\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2-\rho}} = (1 + |\tau|)\frac{x^{\rho-1}}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Tomando de nuevo $x = |\tau|$ y observando que $0 < \rho < 1/2$ obtenemos la estimación.

3) Sea $s = \sigma + i\tau$ un punto situado en la región $\sigma \geq 1$, $\tau \geq 2$ y sea C un circunferencia centrada en s y con un radio $\rho < 1/2$ que fijaremos más tarde. Una aplicación de la fórmula de Cauchy nos da

$$|\zeta'(s)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta(z)}{(z-s)^2} dz \right| \leq \frac{M}{\rho},$$

donde M es el valor máximo de $|\zeta(z)|$ en C.

Para la parte de C que está en $\Re(z) \geq 1$ utilizamos la estimación dada en 1): $\zeta(z) \ll \log |\tau|$.

Para la parte de C que está en $\Re(z) < 1$ observemos que $\Re(z) \geq \Re(s) - \rho \geq 1 - \rho$ y que $|\tau| + 1/2 \geq |\Im(z)| \geq |\Im(s)| - \rho = |\tau| - \rho \geq 2$. En este caso utilizamos la estimación dada en 2): $\zeta(z) \ll \frac{\Im(z)^\rho}{\rho} \ll \frac{|\tau|^\rho}{\rho}$.

Tomando $\rho = \frac{1}{\log |\rho|}$ obtenemos que $M \ll \log |\tau|$ y de aquí la estimación que buscábamos.

4) Comencemos con la identidad

$$3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta) = 2(1 + \cos\theta)^2 > 0. \tag{6.7}$$

La fórmula (6.1) implica que en particular podemos escribir

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

con $c_n = 1/m$ si $n = p^m$ y $c_n = 0$ en otro caso. En particular tenemos que $c_n \geq 0$ para todo n. Por otra parte

$$\log |\zeta(s)| = \Re(\log \zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\cos(\tau \log n)}{n^\sigma}.$$

Si aplicamos la identidad (6.7) a los tres casos $s = \sigma,\ \sigma + i\tau,\ \sigma + 2i\tau$ con $\sigma > 1$, podemos escribir:

$$3\log|\zeta(\sigma)| + 4\log|\zeta(\sigma + i\tau)| + \log|\zeta(\sigma + 2i\tau)| = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{3 + 4\cos(\tau \log n) + \cos(2\tau \log n)}{n^\sigma} \geq 0.$$

Por tanto,

$$|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + i\tau)|^4 |\zeta(\sigma + 2i\tau)| \geq 1 \tag{6.8}$$

, que es equivalente a

$$|(\sigma-1)\zeta(\sigma)|^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+i\tau)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2i\tau)| \geq \frac{1}{\sigma-1}.$$

Supongamos que existiese τ tal que $\zeta(1+i\tau)=0$. En ese caso $\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{\zeta(\sigma+i\tau)}{\sigma-1} = \zeta'(1+it)$, $\lim_{\sigma\to 1^+}(\sigma-1)\zeta(\sigma)=1$ y $\lim_{\sigma\to 1^+}\zeta(\sigma+2i\tau)=\zeta(1+2i\tau)$ y llegamos a una contradicción por que $\lim_{\sigma\to 1^+}\frac{1}{\sigma-1}=\infty$.

Luego ζ no puede anularse en la recta $\sigma=1$.

5) De (6.8) obtenemos la estimación

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+i\tau)|} \leq |\zeta(\sigma)|^{3/4}|\zeta(\sigma+2i\tau)|^{1/4}.$$

En la región $1\leq\sigma\leq 2,\ |\tau|\geq 2$, tenemos que

$$|\zeta(\sigma)| \ll \frac{1}{\sigma-1}, \qquad |\zeta(\sigma+2i\tau)| \ll \log|\tau|,$$

que sustituidas en la estimación anterior producen

$$|\zeta(\sigma+i\tau)| \geq B\frac{(\sigma-1)^{3/4}}{(\log|\tau|)^{1/4}}, \qquad 1\leq\sigma\leq 2,\ |\tau|\geq 2,$$

donde $B>0$ es una constante.

Consideremos $\theta>\sigma$. Podemos escribir

$$|\zeta(\sigma+i\tau)-\zeta(\theta+i\tau)| \leq \int_\sigma^\theta |\zeta'(t+i\tau)dt \leq A(\theta-\sigma)\log^2|\tau|.$$

Esto nos da

$$|\zeta(\sigma+i\tau)| \geq |\zeta(\sigma+i\tau)| - |\zeta(\sigma+i\tau)-\zeta(\theta+i\tau)| \geq B\frac{(\sigma-1)^{3/4}}{(\log|\tau|)^{1/4}} - A(\theta-\sigma)\log^2|\tau|.$$

Finalmente escogemos $\theta=\sigma+\left(\frac{B}{2A}\right)^4\frac{1}{\log^9|\tau|}$ y al sustituir obtenemos

$$|\zeta(\sigma+i\tau)| \geq \frac{B^4}{16A^3}\frac{1}{\log^7|\tau|}.$$

□

Con el lema anterior en nuestra mano resulta muy fácil justificar el traslado de la línea vertical $c + i\tau$ con $c > 1$ a la línea $1 + i\tau$ en al fórmula del lema 6.0.4.

Consideremos el el contorno rectangular de lados verticales $1+i\tau,\ c+i\tau,\ |\tau| \leq T$ y lados horizontales $\sigma + iT,\ \sigma - iT,\ 1 \leq \sigma \leq c$.

Los lemas 6.0.5 y 6.0.7 nos dicen que la función

$$f(s) = \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right)$$

es analítica en un entorno del rectángulo R; además en los lados horizontales tenemos que

$$|f(\sigma + i\tau)| \ll x^{c-1} \frac{\log^9 T}{T^2}.$$

Es decir, fijado $x > 0$, la integral sobre los lados horizontales de la función f tiende a 0 cuando $T \to \infty$.

Por lo tanto,

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)ds = \int_{1-\infty}^{1+\infty} f(s)ds.$$

Es decir,

$$\frac{\Psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau \log x}}{(1+i\tau)(2+i\tau)} \left\{ -\frac{\zeta'(1+i\tau)}{\zeta(1+i\tau)} - \frac{1}{i\tau} \right\} d\tau.$$

Por otra parte la función

$$h(\tau) = \frac{1}{(1+i\tau)(2+i\tau)} \left\{ -\frac{\zeta'(1+i\tau)}{\zeta(1+i\tau)} - \frac{1}{i\tau} \right\} d\tau$$

verifica la acotación

$$|h(\tau)| \ll \frac{\log^9 |\tau|}{1 + |\tau|^2}$$

y por lo tanto es integrable y, culminando la estrategia esbozada en la sección anterior, podemos invocar al Teorema de Riemann-Lebesgue para concluir la demostración del teorema de los números primos.