El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Historia de las fórmulas y algoritmos para π

por

Jesús Guillera Goyanes

A lo largo de más de dos milenios se han obtenido muchas fórmulas, algunas de gran belleza, para el número π. Entre ellas: series, productos infinitos, desarrollos en fracciones continuas y desarrollos con radicales. También se han conseguido evaluar algunas expresiones que, ¡oh maravilla!, estaban relacionadas con π. Además ha habido una continua batalla por conseguir records de cálculo de las cifras de este número, que se han ido estableciendo con series de convergencia rápida, algoritmos ultrarápidos y otros de cálculo aislado de cifras realmente sorprendentes. En estos logros de cálculo el desarrollo de ordenadores cada vez más potentes ha jugado un papel esencial.

1 . La primera fórmula: El algoritmo de Arquímedes

El algoritmo para el cálculo de π que Arquímedes demostró unos 250 años A.C. constituyó durante un periodo de aproximadamente 1800 años la forma más eficiente para el cálculo de π. La idea consistía en considerar un círculo de diámetro unidad y polígonos circunscritos e inscritos de $3\cdot 2^n$ lados. Denotando sus perímetros con a_n y b_n respectivamente, Arquímedes, con razonamientos puramente geométricos, demostró las relaciones

$$a_1 = 2\sqrt{3}, \quad b_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}. \tag{1}$$

Obviamente $b_n < \pi < a_n$ y las sucesiones a_n y b_n convergen hacia el número π. Se trata de un algoritmo que hoy en día podemos demostrar fácilmente usando trigonometría elemental. En efecto, llamando $k_n = 3\cdot 2^n$ se tienen las relaciones

$$a_n = k_n \tan\frac{\pi}{k_n}, \qquad b_n = k_n \mathrm{sen}\frac{\pi}{k_n}.$$

Por lo tanto

$$\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = 2k_n\frac{\tan\frac{\pi}{k_n}\mathrm{sen}\frac{\pi}{k_n}}{\tan\frac{\pi}{k_n}+\mathrm{sen}\frac{\pi}{k_n}} = 2k_n\tan\frac{\pi}{2k_n} = a_{n+1}.$$

Por otra parte

$$\sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{2k_n\tan\frac{\pi}{2k_n}\cdot k_n\mathrm{sen}\frac{\pi}{k_n}} = 2k_n\sqrt{\tan\frac{\pi}{2k_n}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2k_n}\cos\frac{\pi}{2k_n}} = b_{n+1}.$$

La convergencia del algoritmo es lineal, cada 5 iteraciones se obtienen 3 cifras de π. Para verlo utilizamos las desigualdades $\tan x < x$ y $1-\cos x < \frac{x^2}{2}$. Se tiene entonces

$$a_n - b_n = k_n\tan\frac{\pi}{k_n}\left(1-\cos\frac{\pi}{k_n}\right) < \frac{\pi^3}{2k_n^2} = \frac{\pi^3}{18\cdot 2^{2n}} < \frac{\pi^3}{18\cdot 1000^{n/5}}.$$

Para $n=7$ este algoritmo proporciona para π la acotación $3{,}1415 < \pi < 3{,}1417$.

Es instructivo señalar que en la época de Arquímedes no se conocía la notación decimal de los números ni ninguna otra notación posicional, por lo que el resultado que obtuvo con polígonos de 96 lados ($n=5$) lo expreso con fracciones:

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}.$$

Esta acotación determina dos cifras decimales de π.

2 . Sin grandes novedades hasta 1800 años después

Durante un periodo de aproximadamente 1800 años todas las fórmulas que se obtuvieron para π se basaron en la idea de aproximar el círculo mediante polígonos regulares y tienen la forma de algoritmos iterativos. En el año 1593 Viète obtiene una expresión diferente mediante un bonito desarrollo con infinitos radicales anidados:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots. \qquad (2)$$

El método usado por Viète se basa, como todos los anteriores, en la geometría y consiste en considerar un círculo de diámetro 2 e ir aproximando su área, es decir π, sucesivamente por las áreas de un cuadrado inscrito, de un octógono inscrito, de un polígono inscrito de 16 lados, etc. De esta manera Viète obtiene π con 9 cifras decimales: 3,141592653.

Hacia el año 1650 los métodos analíticos de Descartes y Fermat, precursores del cálculo infinitesimal que pronto sería desarrollado, comenzaron a sustituir a los métodos geométricos. Uno de los resultados para π correspondiente a esta etapa es el famoso producto infinito de Wallis (1655):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 8} \cdots \tag{3}$$

En 1999 Osler demostró una fórmula que incluye como casos particulares tanto la fórmula de Viète como el producto infinito de Wallis. La veremos en la sección 10.

3 . Comienzos del Cálculo Infinitesimal: Nuevas fórmulas para π

Entre 1665 y 1680 Newton y Leibniz desarrollaron de forma independiente los principios básicos del cálculo infinitesimal que proporcionaron una poderosa herramienta de cálculo no sólo para las matemáticas sino también para la física y otras ciencias. Estos métodos, como no podía ser de otra manera, tienen también su repercusión en la obtención de nuevas fórmulas para π como por ejemplo la obtenida por Newton

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 2 - \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(n+1)(2n+5)16^n}, \tag{4}$$

con la cual calculó 15 decimales de π en el año 1665. Newton llega a esta fórmula observando que el área limitada entre la circunferencia de ecuación

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

y las rectas $x = \frac{1}{4}$ e $y = 0$ es igual a la diferencia entre el área de un sector circular que abarca un ángulo de 60^o y su triángulo correspondiente y que por lo tanto

$$\int_0^{1/4} y\,dx = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}dx = \int_0^{1/4} x^{1/2}(1-x)^{1/2}dx = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

La fórmula de Newton se obtiene a partir de aquí desarrollando $(1-x)^{1/2}$ por medio de la fórmula del binomio, que él mismo había demostrado, e integrando a continuación término a término. Fórmulas como la (4) se conocen actualmente como sumas binomiales. Una serie similar a la de Newton pero más sencilla es

$$\frac{\pi}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)16^n}, \tag{5}$$

que se obtiene sustituyendo $x = \frac{1}{4}$ en el desarrollo en serie (ver [3], pág. 386)

$$\frac{\operatorname{arc\,sen} 2x}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n+1} x^{2n}.$$

Otro ejemplo interesante de suma binomial es la obtenida por Comtet en 1974

$$\pi^4 = \frac{3240}{17} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \binom{2n}{n}} \tag{6}$$

que se demuestra a partir de la identidad [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \binom{2n}{n}} = 2 \int_0^{\pi/3} \theta \log^2 \left(2\mathrm{sen}\frac{\theta}{2} \right) d\theta.$$

Gregory en 1671 integra término a término la serie geométrica

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, \qquad |x| < 1$$

y obtiene la fórmula (que lleva su nombre)

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \le 1,$$

que es lo que luego se conocería como desarrollo en serie de potencias de x de la función $\arctan x$. Sustituyendo $x = 1$, Leibniz obtiene en 1674 la serie para π

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \tag{7}$$

Es extraño que Gregory no diera él mismo este paso, seguramente no lo hizo porque no estaba interesado en series de convergencia lenta. Sharp sustituye $x = \sqrt{3}/3$ en la fórmula de Gregory y obtiene la serie

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots \right) \tag{8}$$

que le sirve para conseguir en 1699 un record de 71 cifras decimales de π.

En 1665 Brounker halla el bonito desarrollo en fracción continua

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}. \tag{9}$$

Unos 100 años más tarde Euler la demuestra de forma ingeniosa: Comienza con la siguiente igualdad

$$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4 \cdots = \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \cfrac{a_4}{1 + a_4 - \ddots}}}},$$

lo que permite representar la serie de Gregory escrita en la forma

$$\arctan x = x + x\left(\frac{-x^2}{3}\right) + x\left(\frac{-x^2}{3}\right)\left(\frac{-3x^2}{5}\right) + x\left(\frac{-x^2}{3}\right)\left(\frac{-3x^2}{5}\right)\left(\frac{-5x^2}{7}\right) + \cdots$$

mediante una fracción continua de la que obtiene la fórmula de Brounker sustituyendo $x = 1$.

Un ejemplo reciente de desarrollo de π en fracción continua es [16]

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \ddots}}}}}, \tag{10}$$

obtenido en 1999 por Lange.

4 . Series rápidas de tipo Machin

En 1706 John Machin demostró la fórmula que lleva su nombre

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} \tag{11}$$

y utilizando la fórmula de Gregory la escribió en forma de serie y consiguió con ella calcular los 100 primeros decimales de π. Las siguientes identidades son del mismo tipo pero conducen a series de convergencia más lenta:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}, \qquad \frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}. \tag{12}$$

Demostrar una fórmula de tipo Machin, una vez conocida, se reduce a la comprobación rutinaria de una identidad entre operaciones elementales con números complejos. Así, la identidad

$$\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2+2i$$

encapsula la demostración de la fórmula de Machin –basta con igualar los argumentos. Gauss también participó en la búsqueda de series para π de convergencia rápida y en 1863 demostró la siguiente identidad

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}, \tag{13}$$

que es como las anteriores pero que involucra un término más. En el año 2002 Kanada y su equipo, empleando ciertos trucos para hacer más eficaces los cálculos por ordenador, consiguieron un record de cálculo de π por medio de las series:

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}, \tag{14}$$

$$\frac{\pi}{4} = 44\arctan\frac{1}{57} + 7\arctan\frac{1}{239} - 12\arctan\frac{1}{682} + 24\arctan\frac{1}{12943}, \tag{15}$$

la primera obtenida en 1982 por Takano (profesor de secundaria y compositor de canciones) y la segunda en 1896 por Störmer. El record consistió en más de un billón de cifras decimales de π.

5 . Las fórmulas del genial matemático suizo L. Euler

Grandes matemáticos, entre ellos Leibniz y los hermanos Jacob (1654-1705) and Johann Bernoulli (1667-1748) habían intentado sin lograrlo evaluar la suma infinita

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots . \tag{16}$$

Finalmente Euler, en 1736, demostró que su valor era $\frac{\pi^2}{6}$. Para ello, partió del desarrollo en serie de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

y consideró la ecuación

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0.$$

Las soluciones de esta ecuación tenían que ser las soluciones de sen$x=0$, excepto lógicamente $x=0$, es decir: $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\cdots$. Imaginó la serie infinita como si se tratase de un polinomio y procedió a descomponerlo en factores

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Igualando los coeficientes de x^2 obtuvo finalmente la demostración. Además, demostró muchas fórmulas parecidas, entre ellas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32} \tag{17}$$

y la no tan parecida

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}}{n^3}=\frac{\pi^4}{72}. \tag{18}$$

Fórmulas similares a esta última se conocen hoy en día como sumas de Euler [10]. Algunas de ellas sólo se han conseguido sumar muy recientemente, como por ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\right)^2}{n^2}=\frac{17\pi^4}{360} \tag{19}$$

cuya demostración se obtuvo en 1991.

Euler, en su estudio de la divergencia de los inversos de los números primos, consideró progresiones geométricas de la forma:

$$1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\frac{1}{p^8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}},$$

y observó que multiplicando estos desarrollos para todos los primos p se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}, \tag{20}$$

que relaciona el número π con los números primos.

6 . Un extraordinario algoritmo olvidado: Fórmula de C. F. Gauss

Con tan sólo 14 años de edad, Gauss (uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos) considera el siguiente proceso iterativo

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

y define la media aritmético-geométrica de a y b como el límite común

$$M(a,b) = \lim a_n = \lim b_n.$$

En el año 1800 sus investigaciones sobre la media aritmético geométrica le conducen a la siguiente maravillosa fórmula (ver [1], pág. 94-102) en la cual los valores iniciales son $a_0 = 1$ y $b_0 = 1/\sqrt{2}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k (a_k^2 - b_k^2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[M\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2. \tag{21}$$

Por razones no muy claras Gauss no utilizó su fórmula para calcular π y la fórmula se olvidó hasta que en 1970 fue redescubierta de forma independiente por Eugene Salamin y Richard Brent [20] que la expresan en forma apropiada para el cálculo iterativo:

$$\lim \frac{2a_n^2}{\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k (a_k^2 - b_k^2)} = \pi.$$

Se puede demostrar que la convergencia hacia π es cuadrática, es decir al pasar de n a $n+1$ se dobla el número de decimales correctos. Brent y Salamin programan el algoritmo en un ordenador, lo que les permite conseguir en 1976 un record al calcular π con 3 millones de cifras decimales, cuando el record hasta entonces era de 1 millón de cifras decimales y se había logrado con fórmulas de tipo Machin.

7 . Series para $1/\pi$ de un genio matemático increíble: S. Ramanujan

Gran parte de la obra del genio matemático hindú Ramanujan se relaciona con la teoría de las funciones modulares, que tiene su origen en el estudio de las integrales elípticas de primera y segunda especie

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2 t}}\, dt, \qquad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sen}^2 t}\, dt.$$

En 1914 estas investigaciones le llevan a la obtención de extraordinarias series para $1/\pi$ totalmente diferentes de todas las conocidas hasta entonces y que son del tipo siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n (bn+a) = \frac{1}{\pi},$$

siendo $b, a > 0$ y $-1 < z < 1$ números algebraicos, y que quedan clasificadas en 4 familias de acuerdo a las siguientes posibilidades de B_n

$$\frac{(2n)!^3}{n!^6}, \qquad \frac{(4n)!}{n!^4}, \qquad \frac{(2n)!(3n)!}{n!^5}, \qquad \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3}.$$

Demuestra parcialmente fórmulas que permiten obtener las series de la primera familia [19] y da 3 ejemplos, uno de los cuales es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^3}{n!^6} \frac{1}{2^{12n}} (42n+5) = \frac{16}{\pi}. \tag{22}$$

Continúa diciendo que existen teorías alternativas (pero casi no da ningún detalle de ellas) con las que pueden obtenerse series pertenecientes a las otras tres familias y da 14 ejemplos [19] entre los cuales están los siguientes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!^4} \frac{1}{396^{4n}} (26390n+1103) = \frac{9801\sqrt{2}}{4\pi}, \tag{23}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(3n)!}{n!^5} \frac{1}{1458^n} (15n+2) = \frac{27}{4\pi}, \tag{24}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3} \frac{1}{54000^n} (11n+1) = \frac{5\sqrt{15}}{6\pi}. \tag{25}$$

La serie (23) es increíblemente rápida ya que con ella se obtienen unos 8 decimales de π por término. En 1985 B. Gosper programa la fórmula en un ordenador, antes de que se conociera la demostración, y consigue con ella un record de 17 millones de cifras de π.

Los hermanos Jonathan and Peter Borwein son los primeros en demostrar (1985) fórmulas que permiten obtener las dos primeras familias de fórmulas de Ramanujan [3] y consiguen demostrar la identidad (23). Los hermanos David y Gregory Chudnovsky contribuyen hallando la cuarta familia [9] y como caso particular consiguen la impresionante serie, no descubierta por Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3} \frac{(-1)^n}{640320^{3n}} (545140134n+13591409) = \frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi} \tag{26}$$

que aporta 15 decimales de π por término y con la cual baten records de cálculo de π en los años 1989, 1991 y 1994, este último de 4044 millones de cifras de π. Finalmente, H.H. Chan, W. C. Liaw y V. Tan hallan las fórmulas necesarias que determinan la tercera familia [7] y a partir de ellas demuestran la fórmula, tampoco descubierta por Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!(2n)!}{n!^5} \frac{(-1)^n}{300^{3n}} (14151n + 827) = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi}. \tag{27}$$

La demostración de las fórmulas correspondientes a familias de series para $1/\pi$ consiste en hallar ciertas funciones $z(q)$, $b(q)$ y $a(q)$, relacionadas con las funciones modulares elípticas, tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \{b(q)n + a(q)\} z(q)^n = \frac{1}{\pi}.$$

Recientemente el autor ha conjeturado (ver [14] y [15]) que si definimos las funciones

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n, \qquad W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n' z^n,$$

donde B_n' se obtiene derivando B_n respecto de n como si se tratase de una variable continua, entonces $z(q)$ es la solución de la ecuación funcional

$$q = z \exp \frac{W(z)}{S(z)}$$

y que las funciones $b(q)$ y $a(q)$ vienen dadas por

$$b = \sqrt{N} \frac{q}{zS} \frac{dz}{dq}, \qquad a = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{\pi} - \frac{q\sqrt{N}}{S} \frac{dS}{dq} \right].$$

Esta conjetura parece estar en perfecta armonía con los resultados ya establecidos y permitiría obtener los desarrollos en series de potencias de q para $z(q)$, $S(q)$ que a su vez determinan $b(q)$ y $a(q)$. Para N racional y $q = \pm e^{-\pi\sqrt{N}}$ los valores que se obtienen para $z(q)$, $b(q)$, $a(q)$ son números algebraicos que coinciden con los ya conocidos. Por ejemplo, para

$$S(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(3n)!n!^3} z(q)^n$$

se obtienen los desarrollos

$$z = q - 744q^2 + 356652q^3 - 140361152q^4 + 49336682190q^5 - 16114625669088q^6 + \cdots$$

$$S = 1 + 120q - 6120q^2 + 737760q^3 - 107249640q^4 + 17385063120q^5 - 3014720249760q^6 + \cdots$$

que son precisamente los desarrollos de las funciones

$$z(q) = J(q)^{-1}, \qquad S(q) = \theta_3^4(q)\sqrt{1+\mu(-q)},$$

donde

$$J(q) = \frac{16}{\mu(q)}\left\{1 + 16\mu(q)\right\}^3, \quad \mu(q) = \frac{\theta_2^4(q)\theta_3^4(q)}{\theta_4^8(q)}$$

siendo θ_2, θ_3, θ_4, las funciones elípticas θ de Jacobi, definidas mediante

$$\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{n^2}, \quad \theta_4(q) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^n q^{n^2}.$$

Estas fórmulas son equivalentes a las ya obtenidas por los hermanos David and Gregory Chudnovsky que, tomando $q = -e^{-\pi\sqrt{163}}$, obtienen la serie (26) y demuestran que es la serie de tipo Ramanujan con parámetro z racional cuya velocidad de convergencia es la más rápida posible.

8 . El algoritmo cuártico de los hermanos Borwein

Las funciones

$$s(q) = \frac{\theta_2(q)}{\theta_3(q)}, \quad t(q) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\theta_3^4(q)}\left[1 + (4q\ln q)\frac{\theta_4'(q)}{\theta_4(q)}\right].$$

verifican las siguientes magníficas propiedades difíciles de demostrar:

$$s(q^4) = \frac{1-[1-s^4(q)]^{1/4}}{1+[1-s^4(q)]^{1/4}},$$

$$t(q^4) = [1+s(q^4)]^4 t(q) - \frac{4\ln q}{\pi} s(q^4)[1 + s(q^4) + s(q^4)^2],$$

que relacionan valores de las funciones en q con valores en q^4, lo que nos va a permitir obtener un algoritmo cuártico [4]. En efecto, llamando

$$q = e^{-2\pi\cdot 4^n}, \quad s_n = s(q), \quad t_n = t(q)$$

y teniendo en cuenta que los valores de s_0 y t_0 son conocidos, obtenemos el siguiente algoritmo cuártico

$$s_0 = \sqrt{2} - 1, \quad t_0 = 6 - 4\sqrt{2},$$

$$s_{n+1} = \frac{1-(1-s_n^4)^{1/4}}{1+(1-s_n^4)^{1/4}}, \tag{28}$$

$$t_{n+1} = t_n(1+s_{n+1})^4 - 2^{2n+3}s_{n+1}(1+s_{n+1}+s_{n+1}^2)$$

en el cual t_n tiende a $1/\pi$, cuadruplicándose en cada iteración el número de cifras exactas. Este asombroso algoritmo fue descubierto y demostrado por los hermanos Borwein en 1987.

Podría pensarse que con los algoritmos cuadráticos, cuárticos, etc. se tendrían que lograr siempre los records de cálculo de π. Sin embargo no es así pues estos algoritmos no auto-corrigen los errores y obligan a realizar todas las operaciones con la precisión final deseada. En cambio para las series se ha encontrado la forma de ir aumentando la precisión de cálculo sin afectar el resultado final, lo que les permite batir records aún teniendo la desventaja de ser lineales.

9 . El cálculo desordenado de las cifras de π

En 1995 Peter Borwein y Simon Plouffe se dieron cuenta de que la serie

$$\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

podía ser utilizada para hallar el valor de una de las cifras en binario de $\ln 2$ sin necesidad de hallar las cifras que le preceden, mediante el siguiente ingenioso esquema en el cual $\{x\}$ significa la parte fraccionaria de x:

$$\left\{2^k \ln 2\right\} = \left\{\left\{\sum_{n=0}^{k} \frac{2^{k-n}}{n}\right\} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-k}}\right\} = \left\{\left\{\sum_{n=0}^{k} \frac{2^{k-n} \bmod n}{n}\right\} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-k}}\right\},$$

que permite obtener de forma eficiente las cifras binarias de $\ln 2$ a partir de la posición $k+1$. La principal observación para efectuar los cálculos implicados es que el numerador de la primera suma, es decir $2^{k-n} \bmod n$, se puede evaluar con extraordinaria rapidez. Por ejemplo, el cálculo 2^{65} no requiere 65 multiplicaciones sino sólo 7 si lo realizamos en la forma $((((((2^2)^2)^2)^2)^2)^2)\cdot 2$. Teniendo en cuenta la explicación anterior podemos evaluar las operaciones de aritmética modular aplicando un algoritmo muy eficiente que para el caso particular $2^{65} \bmod 9$ consiste en hacer una reducción módulo 9 después de cada multiplicación de las 7 que se requieren en lugar de hacer todas las multiplicaciones seguidas.

En 1989 los hermanos Borwein afirmaron que obtener una cifra binaria de π no podía ser más sencillo que calcular todas las cifras que le preceden. Sin embargo, después de este descubrimiento para $\ln 2$, ya no lo tenían tan claro y el equipo formado por D. Bailey, P. Borwein y S. Plouffe se puso a buscar, con la ayuda del algoritmo PSLQ, una serie para π que permitiera el cálculo aislado de sus cifras en base 2 (ver [6], capítulo 8).

El algoritmo PSLQ es un algoritmo numérico que opera con una precisión prefijada asociando a una entrada de n elementos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ una salida de n números enteros $a_1, a_2, \cdots, a_n$, no todos nulos, de forma que, para la precisión prefijada, se verifica

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

El éxito llegó al considerar los valores

$$x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(8n+j)16^n}, \qquad j = 1, 2, \cdots, 7$$

y buscar con PSLQ una relación lineal con coeficientes enteros entre las entradas π, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. La salida obtenida fue la sucesión de enteros: -1, 4, 0, 0, -2, -1, -1, 0. Es decir habían encontrado una serie [2] que llamaron de tipo BBP (iniciales de los nombres del equipo)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right), \tag{29}$$

que permitía el cálculo desordenado de las cifras de π en hexadecimal y por lo tanto también en binario. La demostración de la fórmula se consiguió poco después a partir del sencillo resultado

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{k-1+8n}dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}$$

que permite escribir

$$\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}dx,$$

integral que se puede evaluar fácilmente con el cambio de variable $y = x\sqrt{2}$ de la manera siguiente

$$16\int_0^1 \frac{4-2y^3-y^4-y^5}{16-y^8}dy = \int_0^1 \frac{16y-16}{(y^2-2)(y^2-2y+2)}dy = \pi.$$

Nada más anunciar la sorprendente fórmula (29) otros investigadores se lanzaron también a la caza de otras bellas fórmulas de tipo BBP. La más sencilla para π fue encontrada y demostrada por Viktor Adamchik y Stan Wagon (ver [23] pág. 66 y 67)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right), \tag{30}$$

que se puede demostrar de forma similar a la anterior partiendo de la identidad

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1+x^4} dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{k-1+4n} dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)}.$$

En 1997 Fabrice Bellard consigue un record de cálculo con su fórmula

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} - \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1024^n} \left(\frac{32}{4n+1} + \frac{8}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right). \tag{31}$$

El último record es de C. Percival que ha obtenido que la cifra binaria de π que ocupa la posición 10000 billones es 0.

También se conocen fórmulas BBP para otros valores relacionados con π, por ejemplo para $\pi\sqrt{3}$

$$\pi\sqrt{3} = \frac{9}{32} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{64^n} \left(\frac{16}{6n+1} + \frac{8}{6n+2} - \frac{2}{6n+4} - \frac{1}{6n+5} \right) \tag{32}$$

y para π^2

$$\pi^2 = \frac{9}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{64^n} \left(\frac{16}{(6n+1)^2} - \frac{24}{(6n+2)^2} - \frac{8}{(6n+3)^2} - \frac{6}{(6n+4)^2} + \frac{1}{(6n+5)^2} \right). \tag{33}$$

10 . Bonitos desarrollos infinitos para π con productos y radicales

Osler, en 1999, demuestra la siguiente fórmula [17]:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{p} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \overset{n}{\cdots} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^{p+1}n-1}{2^{p+1}n} \cdot \frac{2^{p+1}n+1}{2^{p+1}n}, \tag{34}$$

donde la n en el interior de las raíces denota el número de sumandos. Esta fórmula engloba la fórmula de Viète (2) ($p=\infty$); el producto de Wallis (3) ($p=0$) y también fórmulas nuevas. Por ejemplo tomando $p=2$ se tiene

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\cdot\frac{15\cdot 17}{16\cdot 16}\cdot\frac{23\cdot 25}{24\cdot 24}\cdot\frac{31\cdot 33}{32\cdot 32}\cdots. \tag{35}$$

Para llegar a su expresión para π, Osler, partiendo del seno de x, aplica p veces, de forma reiterada, la fórmula del seno del ángulo doble:

$$\operatorname{sen} x=2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}=2^p\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^p}\operatorname{sen}\frac{x}{2^p}$$

y sustituye $t=\frac{x}{2^p}$ en la fórmula de Euler

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\pi^2n^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi-t}{n\pi}\cdot\frac{n\pi+t}{n\pi}\right)$$

lo que le permite combinar las dos fórmulas anteriores para llegar a

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^p}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^pn\pi-x}{2^pn\pi}\cdot\frac{2^pn\pi+x}{2^pn\pi}\right).$$

Para terminar utiliza las siguientes relaciones de trigonometría elemental

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x},\qquad \cos\frac{x}{2^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}},\qquad \cdots$$

y sustituye $x=\frac{\pi}{2}$.

J. Sondow obtiene en 2002 otra bonita expresión con productos y radicales [21]:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1^{(-1)^1\binom{n}{0}}\cdot 2^{(-1)^2\binom{n}{1}}\cdots(n+1)^{(-1)^{n+1}\binom{n}{n}}\right]^{\frac{1}{2^n}} \tag{36}$$

Para ello comienza tomando logaritmos en el producto de Wallis:

$$\ln\frac{\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\ln\frac{k+1}{k}.$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{n\geq k}\frac{\binom{n}{k}}{2^{n+1}}=1$, podemos continuar de la siguiente manera

$$\ln\frac{\pi}{2}=\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\ln\frac{k+1}{k}\sum_{n\geq k}\frac{\binom{n}{k}}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\ln\frac{k+2}{k+1}.$$

En la última expresión reemplaza n con $n-1$, escribe el logaritmo como $\ln(k+2)-\ln(k+1)$ y la suma sobre k como la diferencia de dos sumas, en la primera de las cuales reemplaza k con $k-1$. Aplicando la relación binomial $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ llega al resultado mediante exponenciación.

11 . Resultados muy recientes: Series para $1/\pi$, $1/\pi^2$ y $1/\pi^3$

T. Sato, en una conferencia en Japón en 2002, presenta la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{12n} (20n+10-3\sqrt{5}) = \frac{20\sqrt{3}+9\sqrt{15}}{6\pi}, \tag{37}$$

siendo u_n los números de Apéry, definidos mediante

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2.$$

Poco después se encuentran series de este estilo con otros tipos de números [8], [22], por ejemplo con los números de Domb; H. H. Chan y Y. Yang desarrollan independientemente una teoría explicativa de este tipo de fórmulas que incluye también como caso particular a las de tipo Ramanujan y les dan el nombre de fórmulas de tipo Ramanujan-Sato.

Una explicación radicalmente diferente para algunas fórmulas de tipo Ramanujan, que no hace uso de la teoría de funciones modulares, se basa en el método WZ de Herb Wilf y Doron Zeilberger [18] que permite demostrar automáticamente identidades de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \text{Constante}$$

en el caso en que la función $G(n,k)$ sea hipergeométrica en sus dos variables, es decir si los cocientes $G(n+1,k)/G(n,k)$ y $G(n,k+1)/G(n,k)$ son funciones racionales. El programa EKHAD escrito por D. Zeilberger realiza el trabajo duro encontrando a la función $G(n,k)$ una compañera $F(n,k)$ tal que $F(0,k)=0$ y con la cual forma un par de Wilf y Zeilberger (WZ), es decir, un par que se caracteriza por la propiedad

$$F(n+1,k)-F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k).$$

Además Zeilberger ha demostrado que si definimos $H(n,k)=F(n+1,n+k)+G(n,n+k)$, entonces obtenemos una identidad asociada a la de partida

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(n,k) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \text{Constante}.$$

Es importante señalar que el método WZ es un método simbólico y no numérico como el algoritmo PSLQ (ver sección 9), por lo que las demostraciones que se obtienen son completamente rigurosas. El precio a pagar es la dificultad de encontrar funciones interesantes que sean una componente de un par.

Un tipo de identidades descubiertas por el autor [13], entre las que se encuentran

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{8n}2^{4k}} \frac{\binom{2n}{n}^3\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{k}^2}(6n+4k+1) = \frac{4}{\pi}, \tag{38}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{12n}2^{8k}} \frac{\binom{2n}{n}^5\binom{2k}{k}^4}{\binom{n+k}{k}^4}(20n^2+8n+1+24kn+8k^2+4k) = \frac{8}{\pi^2} \tag{39}$$

son aptas para la demostración automática con EKHAD. Para ver en que consiste el método WZ, explicamos a continuación con detalle la demostración de la identidad (38) basada en dicho método: A la función

$$G(n,k) = \frac{1}{2^{8n}2^{4k}} \frac{\binom{2n}{n}^3\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{k}^2}(6n+4k+1),$$

EKHAD le encuentra una compañera

$$F(n,k) = \frac{1}{2^{8n}2^{4k}} \frac{\binom{2n}{n}^3\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{k}^2}8n$$

con la que forma un par WZ, es decir que verifica

$$F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

propiedad qué tiene la siguiente consecuencia

$$\sum_{n=0}^{\infty}[G(n,k+1)-G(n,k)] = \sum_{n=0}^{\infty}[F(n+1,k)-F(n,k)] = -F(0,k) = 0.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}G(n,0) = \sum_{n=0}^{\infty}G(n,1) = \sum_{n=0}^{\infty}G(n,2) = \cdots.$$

Pero

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}G(n,k) = \lim_{k\to\infty}G(0,k) + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}G(n,k) = \lim_{k\to\infty}\frac{\binom{2k}{k}^2}{2^{4k}}(4k+1) = \frac{4}{\pi}.$$

Así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,0) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,1) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,2) = \cdots = \frac{4}{\pi}.$$

Más aún, aplicando un teorema de Carlson se deduce que

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \frac{4}{\pi}$$

incluso para valores no enteros de k. Sustituyendo $k=0$ en la identidad (38) y en su asociada, obtenemos las series de Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^3}{n!^6} \frac{1}{2^{8n}} (6n+1) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^3}{n!^6} \frac{1}{2^{12n}} (42n+5) = \frac{4}{\pi}. \tag{40}$$

Para la función $G(n,k)$ en la serie (39), EKHAD encuentra su compañera

$$F(n,k) = \frac{(-1)^n}{2^{12n} 2^{8k}} \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2k}{k}^4}{\binom{n+k}{k}^4} \cdot 8n(2n+4k+1),$$

y podemos decir que la demostración de (39) está encapsulada en dicho par $F(n,k)$, $G(n,k)$. Sustituyendo $k=0$ en la identidad (39) y en su asociada, obtenemos las nuevas fórmulas [11], [13]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^5}{n!^{10}} \frac{(-1)^n}{2^{12n}} (20n^2+8n+1) = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^5}{n!^{10}} \frac{(-1)^n}{2^{20n}} (820n^2+180n+13) = \frac{8}{\pi^2}. \tag{41}$$

Con el algoritmo PSLQ el autor consigue encontrar más series de este estilo para $1/\pi^2$ [12], por ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{n!^6} \frac{(-1)^n}{2880^{3n}} (5418n^2+693n+29) = \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}, \tag{42}$$

para las que todavía no se conoce la demostración. En [14] se encuentran de nuevo las mismas series a partir de una conjetura.

B. Gourevitch, haciendo uso del algoritmo PSLQ, encuentra una serie para $1/\pi^3$ [12]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!^7}{n!^{14}} \frac{1}{2^{20n}} (168n^3+76n^2+14n+1) = \frac{32}{\pi^3} \tag{43}$$

que tampoco ha podido ser demostrada todavía.

W. Zudilin, mediante transformaciones cuadráticas de las identidades (41) demuestra las nuevas identidades [24]

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{(4n)!}{n!^2(2n)!}(18n^2-10n-3)\frac{1}{(2^8 5^2)^n} = \frac{10\sqrt{5}}{\pi^2}, \tag{44}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{(4n)!}{n!^2(2n)!}(1046529n^2+227104n+16032)\frac{1}{(5^4 41^2)^n} = \frac{5^4 41\sqrt{41}}{\pi^2}, \tag{45}$$

siendo w_n los números definidos por

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}^3 \binom{2n-2k}{n-k} 2^{4(n-k)}$$

y con estas fórmulas damos por concluido nuestro recorrido histórico.

Agradecimiento al profesor D. Javier Cilleruelo por sus valiosas sugerencias y comentarios.

Referencias

[1] J. Arndt, C. Haenel, *π unleashed*, Springer-Verlag, 2001.

[2] D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, On the rapid computation of various polylogarithmic constants. *Mathematics of Computation* **66** (1997) 903–913.

[3] J. Borwein, P. Borwein, *Pi and the AGM*, Wiley Interscience, (1987).

[4] J. Borwein, P. Borwein, D. Bailey, Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to compute One Billion Digits of Pi. *American Mathematical Monthly* **96** (1989).

[5] J. Borwein, D. Broadhurst, J. Kamnitzer, Central Binomal Sums, Multiple Clausen Values and Zeta Values. *Experimental Mathematics* **10** (2001).

[6] J. P. Delahaye, *Le fascinant nombre π*, Bibliothèque pour la science, (1997).

[7] Heng Huat Chan, Wen-Chin Liaw, Victor Tan, Ramanujan's class invariant λ_n and a new class of series for $1/\pi$. *Journal of the London Mathematical Society* **64** (2001) 93–106.

[8] Heng Huat Chan, Song Heng Chan, Zhiguo Liu, Domb's numbers and Ramanujan-Sato type series for $1/\pi$. *Advances in Mathematics*, **186** (2004) 396–410.

[9] D. V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, Approximations and complex multiplication according to Ramanujan. En *Ramanujan revisted*. Academic Press, 1988, pp. 375–472.

[10] P. Flajolet, B. Salvy, Euler sums and contour integral representations. *Experimental Mathematics* **7** (1998) 15–35.

[11] J. Guillera, Some binomial series obtained by the WZ-method. *Advances in Applied Mathematics* **29** (2002) 599–603.

[12] J. Guillera, About a new kind of Ramanujan type series. *Experimental Mathematics*, **12** (2003) 4, 507–510.

[13] J. Guillera, Generators of Some Ramanujan Formulas. *The Ramanujan Journal* **11** (2006), 41–48.

[14] J. Guillera, A new method to obtain series for $1/\pi$ and $1/\pi^2$. *Experimental Mathematics* **15** (2006) 83–89.

[15] J. Guillera, A class of conjectured series representations for $1/\pi$. *Experimental Mathematics* **15** (2006) 409–414.

[16] L. J. Lange, An elegant new continued fraction for π. *American Mathematical Monthly* **106** (1999) 456–458.

[17] T. J. Osler, The united Vieta's and Wallis's products for π. *American Mathematical Monthly* **106** 774–776. (1999).

[18] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A=B*, A.K. Peters Ltd., Appendix A, (1996).

[19] S. Ramanujan, Modular equations and approximations to π. *Quarterly Journal of Mathematics* **45** (1914) 350–372.

[20] E. Salamin, Computation of π Using Arithmetic-Geometric Mean. *Mathematics of Computation* **30** (1976) 565–570.

[21] J. Sondow, A faster product for pi and a new integral for ln pi/2. *American Mathematical Monthly* **112** (2003) 729–734.

[22] Y. Yang, On differential equations satisfied by modular forms. *Mathematische Zeitschrift* **246** (2004) 1–19.

[23] A. V. Zhúkov, *El omnipresente número* π, Serie de divulgación científica *Matemática* 11. Traducido de la edición rusa: Editorial URSS, Moscú, (2004).

[24] W. Zudilin, *Quadratic transformations and Guillera's formulae for* $1/\pi^2$. *Matematicheskie Zametki* **81** (2007) 335–340 (versión en ruso). También aparecerá en *Mathematical Notes* **87** (2001).

Jesús Guillera Goyanes
Zaragoza
Correo electrónico:`jguillera@able.es`