Capítulo 5

Aproximación de números reales por racionales

En la antigua Grecia los números tenían un carácter mágico y divino. El primer lugar de la jerarquía lo ocupaban los números enteros. Había otros sin el mismo grado de perfección, los que se expresan como cociente de dos enteros. En aquellos tiemos parecía inconcebible que existiera otra clases de números. Cuenta la leyenda que el primer matemático que demosttró que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no puede ser el cociente de dos enteros, pagó muy cara su herejía.

Son otros tiempos y podemos empezar este capítulo demostrando que $\sqrt{2}$ es un número irracional sin ningn tipo de temor.

Teorema 5.0.1. *$\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración. Si $\sqrt{2} = a/b$ entonces $2b^2 = a^2$. Pero entonces el exponente de 2 de la parte izquierda es impar, mientras el exponente de la derecha es par. $\square$

Después de este sencillo ejercicio a estudiar cómo se aproximan los números reales por racionales.

5.1. Aproximación de números reales por racionales

Proposición 5.1.1. *Sea θ real y N un entero positivo. Entonces existe un racional $\frac{h}{k}$, $0 \leq k \leq N$ tal que $\left|\theta - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{kN}$.*

Demostración. Si $\theta = \frac{p}{q}$, con $q \leq N$ entonces $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| = 0 \leq \frac{1}{kN}$.

Si $\theta = \frac{p}{q}$ con $q > N$ ó θ es irracional, construyamos los números $(m\theta) = m\theta - [m\theta],\ m = 1, \ldots, N$.

Ahora aplicamos el principio del palomar al intervalo $[0, 1]$ dividido en N trozos de longitud $1/N$.

$$[0, 1/N),\ [1/N, 2/N), \ldots, [(N-1)/N, 1).$$

Si existe un m tal que $(m\theta)$ está en el primer intervalo, tendríamos $|m\theta - [m\theta]| < 1/N$, Dividiendo entre m obtenemos la aproximación deseada:

$$\left|\theta - \frac{[m\theta]}{m}\right| < \frac{1}{mN}.$$

Si no existiera tal m, tendríamos N números en $N-1$ intervalos. Luego dos de ellos, $(m\theta)$ y $(m'\theta)$ tendrían que estar en el mismo intervalo, por lo que su distancia sería menor que $1/N$,

$$|m\theta - [m\theta] - (m'\theta - [m'\theta])| < \frac{1}{N}.$$

Dividiendo entre $m - m'$ obtenemos el resultado deseado:

$$\left|\theta - \frac{[m\theta] - [m'\theta]}{m - m'}\right| < \frac{1}{(m - m')N}.$$

□

Proposición 5.1.2. *El número θ es irracional si y sólo si existen infinitas fracciones $\frac{a}{b}$ tales que $\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$.*

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que para cada n existe una fracción $\frac{a_n}{b_n}$ tal que

$$\left|\theta - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{nb_n}$$

con $b_n \leq n$. Entonces $\left|\theta - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n^2}$.

Si sólo hubiese un número finito de fracciones $\frac{a_n}{b_n}$ cumpliendo dicha propiedad, una misma fracción tendría lugar para infinitos n: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ para infinitos n. Es decir,

$$\left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{bn}$$

para infinitos valores de n, y tendríamos que $\theta = \frac{a}{b}$.

En el otro sentido, supongamos que $\theta = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, es un racional y que existen infinitos racionales $\dfrac{a}{b}$ tales que si $\left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{1}{b^2}$. Como $\dfrac{1}{bq} \leq \left|\dfrac{p}{q} - \dfrac{a}{b}\right|$ para $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{p}{q}$ entonces necesariamente tenemos que $b < q$, lo que limita a un número finito las posibilidades de los racionales $\dfrac{a}{b}$. □

El resultado de la proposición 5.1.2 puede ser mejorado en el sentido de sustituir $|\theta - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^2}$ por $|\theta - \frac{a}{b}| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$. El resultado no es cierto para una constante mayor que $\sqrt{5}$ debido a que no lo es para la ra
'on aurea $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Demostrar que un número real es irracional puede constitutir un problema muy difícil. La siguiente Proposición nos puede ayudar en algunos casos.

Proposición 5.1.3. *Un número θ es irracional si y sólo si existen infintas fracciones p_n/q_n tales que $|\theta - p_n/q_n| = o(1/q_n)$.*

Demostración. Si $\frac{P}{Q}$, $\frac{p}{q}$ son racionales distintos es claro que

$$\left|\frac{P}{Q} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|Pq - pQ|}{Qq} \geq \frac{1}{Qq}.$$

Por lo tanto para ver que un número θ es irracional basta con obtener una sucesión de racionales $\frac{p_n}{q_n}$ tales que

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| = o\left(\frac{1}{q_n}\right).$$

□

5.2. Irracionalidad de π y de e^m

La estrategia sugerida en la Proposición 5.1.3 para ver si un número es irracional no siempre es fácil de aplicar. Afortunadamente las propiedades intrínsecas de ciertos números nos permiten combinarla con otro tipo de argumentos para demostrar que son irracionales.

Teorema 5.2.1. *El número π es irracional.*

Demostración. Supongamos que π es racional, digamos $\pi = \dfrac{n}{m}$ y onsideremos el polinomio $p(x) = x(n - mx)$.

Veamos primero que $D_x^j\left(\dfrac{p^k(x)}{k!}\right)$ es un entero en $x = 0$ y en $x = \pi$.

$$D_x^j\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right) = D_x^j\left(\frac{1}{k!}x^k(n-mx)^k\right) = \frac{1}{k!}\sum_{0\leq r\leq k}\sum_{0\leq s\leq k} a_{r,s}x^r(n-mx)^s$$

para ciertos enteros $a_{r,s}$.

Si $r > 0$ y $s > 0$, entonces $\frac{1}{k!}a_{r,s}x^r(n-mx)^s$ se anula en $x = 0$ y en $x = \pi = n/m$.

Si $r = 0$, entonces x^k ha sido derivado por lo menos k veces y por lo tanto $k!$ debe dividir a $a_{0,s}$.

Tenemos entonces que $\frac{1}{k!}a_{0,s}(n-mx)^s$ es entero en $x = 0$ y en $x = n/m$.

Por último, si $s = 0$, $a_{r,0}$ será múltiplo de $m^k k!$ por la misma razón anterior. En este caso $\frac{1}{k!}a_{r,0}x^r$ también es entero en $x = 0$ y en $x = n/m$ porque $r \leq k$.

Una vez visto esto pasemos a demostrar nuestro teorema. Por definición

$$e^{p(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k(x)}{k!}.$$

Entonces

$$\int_0^{\pi}\sin x\; e^{p(x)}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\sin x\;\frac{p^k(x)}{k!}dx.$$

Integrando por partes tenemos

$$\int_0^{\pi}\sin x\;\frac{p^k(x)}{k!}dx = -\cos x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)'\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)'dx.$$

Integrando otra vez por partes,

$$\int_0^{\pi}\cos x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)'dx = \sin x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)''\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)''dx.$$

En un número finito de pasos obtendremos $\int_0^{\pi}\sin x\;\frac{p^k(x)}{k!}$ como una suma finita de términos de la forma $\sin x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)^{j)}\Big|_0^{\pi}$ y $\cos x\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)^{j)}\Big|_0^{\pi}$.

Como las funciones $\sin x$, $\cos x$ y $\left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)^{j)}$ toman valores enteros en $x = 0$ y $x = \pi$, el valor de la integral será un número entero para todo k.

Además las funciones $\sin x$ y $\frac{p^k(x)}{k!}$ son estrictamente positivas en el intervalo $(0,\pi)$. Luego la integral $\int_0^\pi \sin x\ \frac{p^k(x)}{k!}dx$ debe ser un número entero mayor o igual que 1.

Por tanto la integral $\int_0^\pi \sin x\ e^{p(x)}$ debería ser infinita, lo cual es absurdo porque estamos integrando sobre un intervalo finito una función acotada en dicho intervalo. □

Teorema 5.2.2. *El número e^m es irracional para todo entero $m \neq 0$.*

Demostración. Consideremos el polinomio $p(x) = x(m-x)$. Por las mismas razones que en el teorema anterior, $D_x^j\left(\dfrac{p^k(x)}{k!}\right)$ toma valores enteros en $x = 0$ y en $x = m$.

También tenemos

$$\int_0^m e^x e^{p(x)}dx = \int_0^m e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k(x)}{k!}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^m e^x \frac{p^k(x)}{k!}dx.$$

Integrando por partes,

$$\int_0^m e^x \frac{p^k(x)}{k!}dx = e^x \left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)' \Big|_0^m - \int_0^m e^x \left(\frac{p^k(x)}{k!}\right)' dx.$$

Repitiendo el proceso un número finito de veces, el valor de la integral para cada k será de la forma $e^m z_1 + z_2,\ z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

También cada una de las integrales es estrictamente positiva porque las funciones e^x y $p^k(x)$ son estrictamente positivas en el intervalo $(0, m)$.

Si e^m fuese racional, $e^m = \frac{a}{b}$, entonces $e^m z_1 + z_2 \geq \dfrac{1}{b}$ y

$$\int_0^m e^x e^{p(x)}dx \geq \sum_0^{\infty} \frac{1}{b} = \infty$$

lo cual es absurdo porque la integral es finita. □

Curiosamente, aunque casi todos los números son irracionales, son pocos los que se conocen explícitamente. En general es un problema muy difícil demostrar la racionalidad o irracionalidad de un número real dado. Por ejemplo se desconoce si la constante de Euler,

$$\gamma = \lim_{k\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} - \log k \right)$$

es un número irracional, y en la misma situación se encuentra el número π^e o el número $\zeta(5)$.

5.3. Números algebraicos y trascendentes

Dentro de los números irracionales, hay algunos más irracionales que otros.

Un número irracional es aquél que no satisface ninguna ecuación polinómica de grado 1 con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$. Sin embargo este número satisface una ecuación polinómica de grado 2, $x^2 - 2 = 0$ y, de alguna manera, podemos decir que es menos irracional que por ejemplo $\sqrt[3]{2}$, que satisface una ecuación polinómica de grado 3.

Definicion 5.3.1. *Un número α es un número algebraico de orden n si es raíz de un polinomio irreducible de grado n con coeficientes enteros.*

¿Existen números reales que no son algebraicos de ningún orden? La respuesta es afirmativa. De hecho sabemos mucho más: el conjunto de los números algebraicos es numerable y, por tanto, en el sentido de la teoría de la medida de Lebesgue casi ningún punto es algebraico. Si escogemos al azar un punto de la recta real, con probabilidad igual a 1 se corresponderá con un número no algebraico.

A estos números no algebraicos les llamaremos trascendentes.

Teorema 5.3.2 (Liouville)**.** *Si α es un número algebraico de orden $n \geq 2$, existe una constante $C_\alpha > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C_\alpha}{q^n}$$

para todo par de enteros p, q.

Demostración. Si α es algebraico de orden n, existirá un polinomio irreducible $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Si $|\alpha - \frac{p}{q}$
$ge1$ entonces $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq 1/q$.

Si $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < 1$, sea $M = \sup_{\alpha-1<x<\alpha+1} |f'(x)|$. Por el teorema del valor medio tenemos que para algún $x \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$,

$$\left|f(\alpha) - f(\frac{p}{q})\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |f'(x)| \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| M.$$

Como $f(\alpha) = 0$, tenemos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{|f(p/q)|}{M}.$$

Sustituyendo en el polinomio, $f(p/q)$ es un número racional con denominador menor o igual que q^n y distinto de 0 por ser irreducible. Entonces

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1/M}{q^n}$$

y el teorema está demostrado tomando $C_\alpha = max(1, 1/M)$. □

El estudio de la trascendencia de un número es bastante más difícil que el estudio de su irracionalidad.

Sabemos que π y e son números trascendentes. La trascendencia de π fue demostrada por Lindemann en 1882, acabando así con el famoso problema de la cuadratura del círculo: a partir de un círculo de diámetro 1, ¿podemos construir con regal y compás un cuadrado del mismo área? Esto equivaldría a construir el número $\sqrt{\pi}$. Ahora bien las construcciones con regla y compás involucran la resolución de ecuaciones de primer grado, intersección de dos rectas, o de segundo grado, intersección de una recta y una circunferencia o de dos circunferencias entre sí. Si un número es construible entonces es raíz de un polinomio irreducible (en $\mathbb{Z}$) con coeficientes enteros de grado igual a una potencia de 2.

Como $\sqrt{\pi}$ es trascendente, en particular no puede ser construible y por lo tanto no podemos cuadrar el círculo.

Teorema 5.3.3 (Hermite, 1873)**.** *El número e es trascendente.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que es algebraico y que satisface la ecuación

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0$$

de coeficientes enteros, con $a_0 \neq 0$ y $a_n \neq 0$.

Fijado un número primo p construimos el polinomio

$$P(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

y la función

$$I(y) = \int_0^y e^{y-x} P(x) dx, \qquad y \geq 0.$$

Integrando por partes repetidas veces obtenemos la expresión

$$I(y) = e^y \sum_{j=0}^{d} P^{j)}(0) - \sum_{j=0}^{d} P^{j)}(y)$$

donde $d = (n+1)p - 1$ es el grado del polinomio $P(x)$.

Consideremos la cantidad

$$A = a_0 I(0) + \cdots + a_n I(n) = \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(e^k P^{j)}(0) - P^{j)}(k) \right) = - \sum_{j=0}^{d} \sum_{k=0}^{n} a_k P^{j)}(k).$$

Tenemos que:

1) $P^{j)}(k)$ es un múltiplo de $p!$ si $j \geq p$ y $0 \leq k \leq n$

2) $P^{j)}(k) = 0$ si $j < p$ y $1 \leq k \leq n$ ó si $j < p-1$ y $k = 0$.

3) $P^{j)}(k)$ es un entero divisible por $p!$ excepto en el caso $j = p-1,\ k = 0$.

4) $P^{p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$. Luego , si $p > n$ entonces $P^{p-1)}(0)$ es un entero divisible por $(p-1)!$ pero no por $p!$.

Recapitulemos: si $p > n$ entonces A es un entero distinto de cero y divisible por $(p-1)!$.

Por otro lado, de la definición de la función $I(y)$ se obtiene fácilmente la estimación:

$$|I(y)| \leq ye^y \sup_{0 \leq x \leq y} |P(x)| \leq ye^y (n+y)^d.$$

Luego

$$\begin{aligned} |A| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j||I(j)| &\leq \max_j |a_j| \sum_{j=1}^{n} je^j (n+j)^d \leq \max_j |a_j| e^n n^2 (2n)^d \\ &\leq \max_j |a_j| e^n n^2 (2n)^{(n+1)p-1} \leq C^p \end{aligned}$$

para alguna constante positiva $C = C(n)$.

Si p es suficientemente grande resulta absurdo que $(p-1)! \ll C^p$. □

5.4. Sucesiones uniformemente distribuidas

Definicion 5.4.1. *Decimos que una sucesión de números reales* $\{a_n\} \subset [0,1]$ *está uniformemmente distribuida si para todo intervalo* $I \subset [0,1]$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\{a_j \in I,\ j = 1, 2 \ldots, N\}}{N} = |I|.$$

Esto es lo mismo que decir que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \chi_I(a_j) = |I|,$$

donde χ_I es la función característica del intervalo I.

Teorema 5.4.2 (H. Weyl)**.** *Si θ es un número irracional entonces la sucesión $\{(n\theta)\}$ está uniformemente distribuida en $[0,1]$.*

Vamos a descomponer en varias etapas la demostración de este teorema.

Una partición del intervalo $[0,1]$ es un conjunto de puntos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$.

Una función acotada y definida en $[0,1]$, es continua y definida a trozos si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ del intervalo $[0,1]$ de manera que la restricción de f a cada intervalo $[t_{i-1}, t_i),\ i = 1,\dots,n$ sea una función continua.

El caso en el que la función continua a trozos es igual a una constante en cada intervalo $[t_{i-1}, t_i)$ recibe un nombre especial, se dice que f es una función escalonada. Es decir, f es escalonada si es de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{[t_{k-1},t_k)}(x) \qquad \text{donde}$$

$$\chi_{[t_{k-1},t_k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [t_{k-1}, t_k) \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 5.4.3. *Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{a_n\} \subset [0,1]$ esté uniformemente distribuida en $[0,1]$ es que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) = \int_0^1 f(x)dx$$

para toda función f continua a trozos.

Demostración. i) Si la igualdad (5.4.3) es cierta para toda función continua a trozos, en particular es cierta para la función característica de un intervalo $I = [a,b) \subset [0,1)$, es decri:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{a_j \in I, \quad j = 1,2,\dots,n\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b)}(a_k) = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx = b - a$$

ii) El hecho de que $\{a_n\}$ esté distribuida uniformemente es equivalente a afirmar que la igualdad (5.4.3) es cierta para funciones escalonadas. Basta con observar que toda función continua a trozos puede aproximarse por funciones escalonadas; es decir, que para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar funciones escalonadas f_1 y f_2 tales que $f_1 \leq f \leq f_2$ y $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx \leq \epsilon$. Por tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_2(a_k) = \int_0^1 f_2(x) \leq \int_0^1 f(x)dx + \epsilon.$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_1(a_k) = \int_0^1 f_1(x) \geq \int_0^1 f(x)dx - \epsilon.$$

□

Teorema 5.4.4. *Una condición suficiente y necesaria para que la sucesión* $\{a_n\}$ *esté uniformemente distribuida en el intervalos* $[0, 1]$ *es que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m a_k} = 0$$

para todo entero $m \neq 0$.

Demostración. a) La condición es necesaria: Para probarlo, como $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, basta con aplicar el lema 5.4.3 a las funciones $f(x) = \cos(2\pi m x)$ y $f(x) = \sin(2\pi m x)$ y observar que

$$\int_0^1 \cos(2\pi m x)dx = \int_0^1 \sin(2\pi m x)dx = 0$$

si $m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0$.

b) La suficiencia es un poco más delicada y está basada en el hecho de que toda función continua f en el intervalo $[0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ puede aproximarse uniformemente por polinomios trigonométricos de la forma

$$P(x) = b_0 + (b_1 \cos(2\pi x) + c_1 \sin(2\pi x) + \cdots + b_m \cos(2\pi m x) + c_m \sin(2\pi m x)$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} \cos(2\pi m a_k) + i \sin(2\pi m a_k) = 0$$

para todo $m > 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(a_k) = b_0 = \int_0^1 P(x)dx$$

para todo polinomio trigonométrico $P(x)$ y, por lo expuesto anteriormente, si $|P(x)-f(x)| \leq \epsilon$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(a_k) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) - P(a_k) \\
&= \int_0^1 P(x)dx + O(\epsilon) = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 (P(x) - f(x)dx + O(\epsilon) \\
&= \int_0^1 f(x)dx + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

para toda función continua.

Finalmente basta con observar que si f es continua a trozos, podemos encontrar dos funciones continuas y periódicas tales que $f_1 \leq f \leq f_2$ y $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx \leq \epsilon$. □

Demostración del teorema 5.4.2. Tenemos que probar que para todo entero $m \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m(n\theta)} = 0.$$

Utilizaremos el hecho de que $e^{2\pi i m(n\theta)} = e^{2\pi i m n\theta}$ y que $\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i k x} = \frac{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i(n+1)x}}{1-e^{2\pi i x}}$ cuando x no es un entero.

Al ser θ irracional $m\theta$ nunca va a ser un entero y entonces

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m(n\theta)} \right| = \frac{1}{n}\left| \frac{e^{2\pi i m\theta} - e^{2\pi i(n+1)m\theta}}{1-e^{2\pi i m\theta}} \right| \leq \frac{1}{n}\frac{2}{|1-e^{2\pi i m\theta}|},$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$. □

Hacer estimaciones no triviales del tipo $\sum e^{2\pi i a_j}$ es un instrumento clave para resolver muchos problemas en teoría de números.

Po ejemplo, la sucesión $(n^k\theta)$ se trata en el problema de Waring, y la sucesión $(p\theta)$ donde p recorre los primos, en la conjetura de Goldbach.

El teorema de H. Weyl, y sus extensiones a dimensiones mayores, es un resultado importante no sólo en la teoría de los Números, sino también en Geometría y Sistemas dinñamicos.

En el párrafo siguiente consideraremos otra generalización del caso $(a_n x)$, $a_n \to \infty$ que es válida para casi todos los números $x \in (0, 1]$, en el sentido de la teoría de la medida.

5.4.1. Números normales

Dado el número real $x \in [0,1)$ con desarrollo decimal $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_k \ldots$, y dado un dígito $m \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, el número

$$\frac{\#\{x_j = m,\ j = 1,\ldots,N\}}{N}$$

mide la frecuencia con la que el dígito m aparece en al sucesión de las N primeras cifras decimales de x.

Definicion 5.4.5. *Un número $x \in [0,1)$ será llamado normal si, para todo dígito m, existe*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{x_j = m,\ j = 1,\ldots,N\}}{N} = \frac{1}{10}.$$

En otras palabras, un número normal es aquel que tiene la misma proporción de cada uno de los dígitos en su desarrollo decimal.

Es fácil construir números normales, como $0,1234567890123456789012..$ y no normales, por ejemplo, $0,121212\ldots$ El siguiente teorema de E. Borel tiene conexiones interesantes con otras ramas de las Matemáticas, tales como la Teoría Ergódica y la Probabilidad.

Teorema 5.4.6. *Excepto por un conjunto de medida cero, todos los números son normales.*

La demostración la vamos a basar en una extensión del Teorema de H. Weyl.

Teorema 5.4.7. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números enteros. Para casi todo número real x (es decir, excepto por un conjunto de medida igual a cero), la sucesión $(a_n x)$ está uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1)$.*

Demostración. Fijado el número entero $m \neq 0$, consideremos las sumas

$$S_M(x) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} e^{2\pi i m a_n x}$$

y la integrales

$$\int_0^1 |S_M(x;m|^2 dx = \frac{1}{M^2}\sum_{n,k=1}^{M}\int_0^1 e^{2\pi i m(a_n - a_k)x} dx = \frac{1}{M},$$

ya que si $n \neq k$, entonces $\int_0^1 e^{2\pi i m(a_n - a_k)x} dx = 0$.

Por lo tanto, si consideramos la serie

$$F(x;m) = \sum_{N=1}^{\infty} |S_{N^2}(x;m)|^2$$

resulta que

$$\int_0^1 F(x;m)dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \sum_{N=1}^{k} |S_{N^2}(x;m)|^2 dx = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty.$$

Por lo tanto, para cada entero $m \neq 0$, ha de verificarse que $F(x;m) < \infty$ en casi todo x; es decir, excepto en un conjunto B_m de medida cero.

En particular, si $x \notin B_m$ entonces $\lim_{N\to\infty} S_{N^2}(x;m) = 0$.

Dado el entero positivo M podemos encontrar $N = [\sqrt{M}]$ tal que $N^2 \leq M < (N+1)^2$. Entonces

$$S_M(x;m) = \frac{1}{M} \left\{ \sum_{n=1}^{N^2} e^{2\pi i m a_n x} + \sum_{n=N^2+1}^{M} e^{2\pi i m a_n x} \right\}$$

y

$$|S_M(x;m)| \leq |S_{N^2}(x;m)| + \frac{2N+1}{M}.$$

Luego si $x \notin B_m$ tenemos que

$$\lim_{M\to\infty} S_M(x;m) = 0.$$

Finalmente el conjunto $B = \bigcup_{m\neq 0} B_m$ es de medida cero y verifica que si $x \notin B$ entonces

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{M} e^{2\pi i m a_n x} = 0$$

para todo $m \neq 0$. En particular la sucesión $(a_n x)$ está uniformemente distribuida en $[0,1)$. □

Demostración del teorema 5.4.6. Consideremos la sucesión $a_n = 10^n$. Según el teorema anterior, existe un conjunto de medida cero B tal que si $x \notin B$ entonces $(10^n x)$ está uniformemente distribuida.

Dado el dígito $k = 0, 1, \ldots, 9$ consideremos el intervalo $I_k = [\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10})$. La condición de distribución uniforme implica que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{I_k}(10^n x) = \int_0^1 \chi_{I_k}(x)dx = \frac{1}{10}.$$

La demostración se concluye observando que si $0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ es el desarrollo decimal del número x, entonces $(10^n x) = 0, x_{n+1} \dots$ Es decir, $(10^n x) \in I_k$ si y sólo si $x_{n+1} = k$. $\square$

5.5. Ejercicios

5.5.1. *Demostrar que* $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$ *es irracional.*

5.5.2. *Demostrar que el logaritmo decimal de un racional positivo, o bien es entero, o bien es irracional.*

5.5.3. *Demostrar que* $sen 1$ *es irracional.*

5.5.4. *Sea* $p(n)$ *un polinomio con coeficientes enteros y positivos. Demostrar que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{p(n)}}$ *es racional si y sólo si* $p(n)$ *es de grado* 1.

5.5.5. *Demostrar que* $\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{4q^2}$ *para todo par de enteros* p, q.

5.5.6. *Hallar tres fracciones* a/b *tales que* $|\sqrt{6} - a/b| < b^{-2}$.

5.5.7. *Demostrar que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ *es trascendente.*

5.5.8. *Sea* $\alpha = \sum_n 5^{-n^5}$. *Demostrar que* $\beta = \sqrt{3 + \sqrt{\alpha}}$ *es irracional.*

5.5.9. *Demostrar que todo número racional perteneciente al intervalo* $[0, 1]$ *se puede expresar como una suma finita de fracciones distintas con numerador* 1.

5.5.10. *Demostrar que la sucesión* $\{(n!e)\}$ *no está uniformemente distribuida.*

5.5.11. *En el primer examen saco un* $8|\sin 1|$, *en el segundo* $8|\sin 2|$, *en el tercero* $8|\sin 3|$, *y así sucesivamente. Demostrar que si el número de exámenes es suficientemente grande, la media me saldrá aprobado.*

5.5.12. *Demostrar que, dados dos enteros* a, b, $a \neq 0$, *la sucesión* $\{(an + b)\alpha\}$ *está uniformemente distribuida si y sólo si* α *es irracional.*

5.5.13. *Demostrar que la sucesión* $\{(\log n)\}$ *no está uniformemente distribuida.*

5.5.14. *Demostrar que la sucesión: parte fraccionaria de* $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$ *no está uniformemente distribuida.*

5.5.15. *Demostrar que existe un* n *tal que* (ne) *tiene un* 7 *en el lugar* 77.

5.5.16. *Demostrar que existe un n tal que $[10000(\pi n)] = 2001$ donde (πn) indica la parte fraccionaria de πn.*

5.5.17. *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n\sqrt{3}-[n\sqrt{3}]+1}.$$

5.5.18. *Demostrar que casi todo x en $[0,1)$ es normal en todas las bases.*

5.5.19. *Demostrar que los números $\alpha = 0{,}12345678910111213...$ y $\beta = 0,2357111317192329\ldots$ son irracionales.*

5.5.20. *Sean a, b enteros, $b \neq 0$. Demostrar que $\tan(\frac{\pi}{4}\frac{a}{b})$ es racional si y sólo si b es entero.*

5.5.21. *Demostrar que si α es irracional entonces la sucesión $(n^2\theta)$ está uniformemente distribuida.*

5.5.22. *Sea $L(n)$ el número de enteros positivos menores o iguales que n que son libres de cuadrados. Demostrar que el número $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(n)}{7^n}$ es irracional.*