7.7.9. *Demostrar que existe un conjunto infinito de enteros A tal que $d_A(n) = 1$ para todo entero n distinto de* 0.

Solución: Vamos a construir el conjunto de forma iterativa. Podemos considerar solo los enteros positivos, ya que si $d_A(n) = 1$, $\exists a, b \in A$ tales que $n = a - b$, luego $b - a = -n$ y $d_A(-n) = 1$.

Comencemos incluyendo los números 1 y 2 en el conjunto A. En cada iteración hacemos lo siguiente:

- Definimos $M = \max A$, el mayor número que hemos incluído en A hasta el momento.
- Definimos $B = A - A$, el conjunto de las diferencias.
- Definimos $d = \min(\mathbb{N} \setminus B)$, la primera diferencia que no encontramos en B.
- Definimos $N = \max B$, la mayor de las diferencias hasta el momento.
- Incluimos en el conjunto A los números $a_1 = M + N + 1$ y $a_2 = M + N + 1 + d$.

Al finalizar cada iteración, hemos añadido al conjunto de diferencias B el número d, puesto que $d = a_2 - a_1$. Por lo tanto el conjunto B va a crecer hasta $\mathbb{Z}$. Solo falta ver que en cada iteración no se añade ninguna resta que ya estuviera previamente.

En primer lugar, las diferencias entre a_1 y los elementos de A, y entre a_2 y los elementos de A no estaban previamente en B. Esto es debido a que:

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a_2 - a > a_1 - a \geq M + N + 1 - M > N \geq b$$

Por último hay que comprobar que $\forall b_1, b_2 \in A, a_1 - b_1 \neq a_2 - b_2$. Pero si esto no fuese cierto y existieran tales $b_1, b_2 \in A$, entonces tendríamos que $d = a_2 - a_1 = b_2 - b_1$, luego d ya pertenecía en primer lugar al conjunto B de las diferencias.

Concluimos, ya que como el conjunto B crece hasta $\mathbb{Z}$ y nunca añadimos diferencias que ya estuvieran previamente, iterando el algoritmo indefinidamente conseguimos el conjunto A que cumple: $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, d_A(n) = 1$.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen