7.7.4. *Encontrar un conjunto de Sidon de 8 elementos en {1, ..., 35 } y demostrar que no existe ninguno con 9 elementos.*

Un conjunto de Sidon de 8 elementos en $\{1, \ldots, 35\}$ es

$$A = \{1, 2, 5, 10, 16, 23, 33, 35\}$$

Una manera de comprobar que este conjunto es, efectivamente, de Sidon es generando su triángulo de diferencias, con el objetivo de verificar que todas ellas son distintas. La primera de las filas surge de restar los números consecutivos del conjunto A. Las demás filas se completan sumando los dos nodos superiores y restando el número que queda justo arriba.

1 3 5 6 7 10 2

4 8 11 13 17 12

9 14 18 23 19

15 21 28 25

22 31 30

32 33

34

Nos falta probar que no existe ningún conjunto de Sidon en $\{1, \ldots, 35\}$ con 9 elementos. Para ello, basta con utilizar el Teorema 7.7.1. Siendo así, tenemos que $|A| \leq \sqrt[2]{35} + 35^{1/4} + \frac{1}{2} = 8,85 \implies |A| \leq 8$, puesto que $|A| \in \mathbb{N}$

Otra forma de demostrar que no podemos añadir ningún otro elemento al conjunto es mediante reducción al absurdo. Supongamos que hubiera 9 elementos. Entonces, sea $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$, podemos calcular la suma de las diferencias consecutivas:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_9 - a_8) = a_9 - a_1 \leq 35 - 1 = 34$$

Sin embargo, como las diferencias de los elementos son todas distintas (definición de conjunto de Sidon), tenemos que:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_9 - a_8) \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 \cdot 4 = 36$$

Y por tanto, llegamos a una contradicción, lo que confirma que no hay ningún conjunto de Sidon de 9 elementos en $\{1, \ldots, 35\}$.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.