7.7.2. *Demostrar que si* $A \subset [1, ...N]$ *y* $d_A(n) \leq s$ *para todo* $n \neq 0$, *entonces,* $|A| \leq (sN)^{1/2} + (sN)^{1/4} + \frac{1}{2}$.

Solución:

En primer lugar, recordamos que $d_A(x)$ es el número de representaciones de x como diferencias de dos elementos de A, y $r_A(x)$ es el número de representaciones de x como suma de dos elementos de A.

Tenemos las siguientes propiedades:

$$d_A(x) = r_{A-A}(x) \tag{1}$$

$$|A|^2 = \sum_x r_A(x) \tag{2}$$

Si tenemos dos conjuntos diferentes, A y B, entonces:

$$|A||B| = \sum_x r_{A+B}(x) \tag{3}$$

$$\sum_x r_{A+B}^2(x) = \sum_n r_{A-A}(x) r_{B-B}(x) \tag{4}$$

Tomamos $B = [0, l]$ con

$$l = \sqrt{\frac{N(|A| - s)}{s}}$$

Entonces, por las propiedades anteriores, obtenemos:

$$(|A||B|)^2 = \left(\sum_{n \in A+B} r_{A+B}(x) \right)^2 \leq |A + B| \sum_n r_{A-A}(n) r_{B-B}(n)$$

Acotamos la suma de la siguiente forma:

$$\sum_n r_{A-A}(n) r_{B-B}(n) = \sum_n d_A(n) d_B(n) \leq d_A(0) d_B(0) + s \sum_{n \neq 0} d_B(n) \leq$$

$$\leq |A||B| + s|B|^2 - s|B|$$

Llegamos, entonces, a que:

$$|A|^2|B|^2 \leq (|A||B| + s|B|^2 - s|B|)|A+B|$$

Dividimos entre $|B|^2$. Entonces:

$$|A|^2 \leq |A+B|\left(s + \frac{|A|-s}{|B|}\right) \leq$$
$$\leq (N+l)\left(s + \frac{|A|-s}{l+1}\right) =$$
$$= sN + sl + \frac{N(|A|-s)}{l+1} + \frac{l(|A|-s)}{l+1} \leq$$
$$\leq sN + sl + \frac{N(|A|-s)}{l+1} + |A| - s =$$
$$= sN + s \cdot \sqrt{\frac{N(|A|-s)}{s}} + \frac{N(|A|-s)}{\sqrt{\frac{N(|A|-s)}{s}} + 1} + |A| - s \leq$$
$$\leq sN + 2\sqrt{s}\sqrt{N(|A|-s)} + |A| - s =$$
$$= (\sqrt{sN} + \sqrt{|A|-s})^2$$

Es decir, $|A| - \sqrt{sN} \leq \sqrt{|A|-s}$. Escribiendo $|A| = \sqrt{sN} + c(sN)^{1/4} + 1/2$ y elevando al cuadrado, obtenemos que:

$$c^2(sN)^{1/2} + c(sN)^{1/4} + 1/4 < (sN)^{1/2} + c(sN)^{1/4} + (1/2 - s)$$

.

Lo que no se satisface si $c \geq 1$.

Conclusión:

$$|A| \leq (sN)^{1/2} + (sN)^{1/4} + \frac{1}{2}$$

Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig