7.7.13. *Sean A y B conjuntos de enteros con más de un elemento cada uno. Demostrar que $|AB| \geq |A| + |B| - 1$ y que la igualdad es cierto sólo cuando A y B son progresiones geométricas de la misma razón.*

Primero descartamos el caso $0 \in A \vee 0 \in B$ con dos contraejemplos:

Contraejemplo 1: Sean $A = \{0, 1\}, B = \{0, 2\}$, entonces $AB = \{0, 2\}$ y observamos que entonces $|AB| = 2 < |A| + |B| - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$.

Contraejemplo 2: Sean $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$, entonces $AB = \{0, 1, 2\}$ y observamos que entonces $|AB| = 3 = |A| + |B| - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$, pero A no es una progresión geométrica.

Ahora descartamos el caso $\exists a \in A : a < 0 \vee \exists b \in B : b < 0$ con otros dos contraejemplos:

Contraejemplo 3: Sean $A = B = \{-1, 1, -2, 2\}$, entonces $AB = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ y observamos que entonces $|AB| = 6 < |A| + |B| - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$.

Contraejemplo 4: Sean $A = \{-1, 2\}, B = \{3, 4\}$, entonces $AB = \{-3, -4, 6, 8\}$ y observamos que entonces $|AB| = 4 \geq |A| + |B| - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$, pero ni A ni B son progresiones geométricas.

Ahora estudiamos si se cumple la proposición en el resto de los casos, es decir, cuando los conjuntos A y B sólo tienen elementos positivos.

Sean $a_1 < \ldots < a_j$ y $b_1 < \ldots < b_k$ los elementos de A y B respectivamente. Es claro que

$$b_1a_1 < b_1a_2 < \ldots < b_1a_j < b_2a_j < \ldots < b_ka_j$$

Entonces tenemos por lo menos $j + k - 1 = |A| + |B| - 1$ elementos diferentes en AB, ie $|AB| \geq |A| + |B| - 1$.

Veamos ahora que la igualdad sólo se da cuando A y B son progresiones geométricas de la misma razón. Para ellos, observamos las siguientes sucesiones ordenadas de elementos en AB

$$b_1a_1 < b_1a_2 < b_1a_3 < \ldots < b_1a_j < b_2a_j < \ldots b_{k-1}a_j < b_ka_j$$

$$b_2a_1 < b_2a_2 < \ldots < b_2a_{j-1} < b_3a_{j-1} < \ldots < b_ka_{j-1}$$

En la primera sucesión hay $j+k-1$ elementos. Si AB no tiene más elementos que estos, los elementos de la segunda sucesión tienen que estar en la primera. Observamos que b_1a_1 es menor que todos los elementos de la segunda sucesión y que $b_ka_j$es mayor que todos los elementos de la segunda sucesión, por tanto ninguno de los dos puede estar en la segunda sucesión, luego necesariamente

$$b_1a_2 = b_2a_1, b_1a_3 = b_2a_2, \ldots, b_1a_j = b_2a_{j-1} \tag{1}$$

$$b_1a_j = b_2a_{j-1}, b_2a_j = b_3a_{j-1}, \ldots, b_{k-1}a_j = b_ka_{j-1} \tag{2}$$

De (1) obtenemos que $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{b_2}{b_1}$ para todo $i = 1, \ldots, j-1$. Luego A es una progresión geométrica de razón $r = \frac{b_2}{b_1}$.

De (2) obtenemos que $\frac{b_{i+1}}{b_i} = \frac{a_j}{a_{j-1}}$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$, pero hemos visto que $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{b_2}{b_1} = r$, en particular $\frac{b_{i+1}}{b_i} = \frac{a_j}{a_{j-1}} = \frac{b_2}{b_1} = r$, así que B es también una progresión geométrica y además con la misma razón de A.

En conclusión: La proposición se cumple cuando A y B sólo tienen elementos positivos, pero no es cierta en general, como hemos comprobado con los ejemplos iniciales.

Problema escrito por Óscar Losada Suárez