7.7.1. *Demostrar que para todo* α, β *con* $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ *existe una sucesión de enteros positivos* A *tal que* $\liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \alpha$ *y* $\limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \beta$

Solución: Procedamos construyendo una y demostrando que cumple las dos condiciones. Vamos a construirla de forma que $\frac{A(n)}{n}$ oscile entre α y β.

Caso 1: Supongamos que $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Vamos a construir una sucesión de unos y ceros $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}, \forall i, c_i \in \{0, 1\}$ de la siguiente forma:

Paso 0 $c_1 = 1$.

Paso 1 Añadimos ceros a la sucesión mientras $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k > \alpha$.

Paso 2 Añadimos unos a la sucesión mientras $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k < \beta$.

...

Paso 2n-1 Añadimos ceros a la sucesión mientras $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k > \alpha$.

Paso 2n Añadimos unos a la sucesión mientras $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} c_k < \beta$.

Definimos A como la sucesión de los i tales que $c_i = 1$, y observamos que $\frac{A(n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k = A_n$.

Por construcción, es trivial ver que $\limsup_n A_n \geq \beta$ (ya que $\forall n, sup_{k\geq n} A_n \geq \beta$) y $\liminf_n A_n \leq \alpha$ (ya que $\forall n, inf_{k\geq n} A_n \leq \alpha$). Solo falta ver las otras dos desigualdades:

$$\limsup_n A_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} A_n \leq \inf_{n\geq 1} (\beta + \frac{1}{n}) = \beta$$

$$\liminf_n A_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} A_n \geq \sup_{n\geq 1} (\alpha - \frac{1}{n}) = \alpha$$

Por tanto, $\liminf_n A_n = \alpha$, $\limsup_n A_n = \beta$.

Caso 2: Si $\alpha = \beta = 0$ ó $\alpha = \beta = 1$, tomamos, respectivamente, $A = \{p : p \; primo\}$ y $A = \mathbb{N}$ que tienen densidades 0 y 1 (respectivamente).

Caso 3: Si $\alpha = 0 < \beta$, tomamos $\alpha_n = \alpha + \frac{1}{n+N}$ con N suficientemente grande para que se garantice $\alpha_0 < \beta$. La construcción es la misma que en el caso 1, pero cambiando α por α_n en el paso $2n - 1$.

Es trival ver que $\liminf_n A_n \geq 0$, puesto que $\forall n, A_n \geq 0$. Además, como α_n decrece a α, $\forall n, inf_{k \geq n} A_n = 0$, y $liminf_n A_n = 0 = \alpha$.

Caso 4: Análogamente, si $\alpha < 1 = \beta$ (Este caso y el anterior no son excluyentes), tomamos $\beta_n = \beta - \frac{1}{n+N}$ con N suficientemente grande para que se garantice $\alpha < \beta_0$. La construcción es la misma que en el caso 1, pero cambiando β por β_n en el paso $2n$.

Es trival ver que $\limsup_n A_n \leq 1$, puesto que $\forall n, A_n \leq 1$. Además, como β_n crece a β, $\forall n, sup_{k \geq n} A_n = 1$, y $limsup_n A_n = 0 = \beta$.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen