5.5.9. *Demostrar que todo número racional perteneciente al intervalo [0, 1] se puede expresar como una suma finita de fracciones distintas de numerador 1.*

El enunciado resulta trivial para los extremos del intervalo, esto es, los racionales 0 y 1. Por tanto, basta con demostrar que toda fracción de la forma $\frac{a}{b} < 1$, con a, b $\in \mathbb{N}$, se puede descomponer como suma de fracciones unitarias distintas.

Vamos a hacer la demostración por inducción completa sobre a.

- Si a=1, $\frac{a}{b} = \frac{1}{b}$, que ya es una fracción unitaria. Este será nuestro caso base.
- Suponemos que, para un cierto $a > 1$, el resultado es cierto para cualquier fracción <1 con numerador <a. Esta será nuestra hipótesis de inducción (H.I.).
- Sea $\frac{a}{b}$ <1, $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}$.

  Por tanto, utilizando por ejemplo un algoritmo Greedy, $\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + (\frac{a}{b} - \frac{1}{q}) = \frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}$. Una técnica es ambiciosa o Greedy si busca la solución óptima global utilizando, en cada paso, un óptimo local. Por ejemplo, si utilizamos un algoritmo ambicioso, sea $\frac{a}{b} = \frac{2}{21} \implies q = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + 1 = 11$, ya que la mejor cota que podemos hacer es $\frac{1}{11} < \frac{2}{21} < \frac{1}{10}$.

  Sea $\frac{a}{b} = \frac{1}{q} + \frac{aq-b}{bq}$, habremos probado que $\frac{a}{b}$ se puede expresar como suma de fracciones unitarias $\Leftrightarrow$ $\frac{aq-b}{bq}$ puede descomponerse como suma de unitarias.
  En efecto, $\frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1} \implies a(q-1) <$b $\implies aq - b <$a.

  Por tanto, la hipótesis de inducción nos garantiza que $\frac{aq-b}{bq}$ puede descomponerse como suma de fracciones unitarias distintas.

Finalmente, sólo nos falta probar que todas las fracciones unitarias que intervienen en el sumatorio son distintas. Por H.I, $\frac{aq-b}{bq}$ se descompone en suma de fracciones unitarias distintas. Por consiguiente, nos falta demostrar que ninguna es $\frac{1}{q}$.

aq-b <a <b $\implies \frac{aq-b}{bq} < \frac{b}{bq} = \frac{1}{q}$.

Y esto garantiza que toda fracción preteneciente al intervalo [0, 1] admite al menos una descomposición en suma de fracciones unitarias diferentes.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.