5.5.8. *Sea* $\alpha = \sum_n 5^{-n^5}$.*Demostrar que* $\beta = \sqrt{3+\sqrt{\alpha}}$ *es irracional.*

Solución:

Primero veremos que α es irracional. Para ello denotemos:

$$\frac{p_n}{q_n} = \sum_{k=0}^{n} 5^{-k^5} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^{2^5}} + \frac{1}{5^{3^5}} + \cdots + \frac{1}{5^{n^5}} = \frac{?}{5^{n^5}} \Leftrightarrow q_n \leq 5^{n^5}$$

$\mid \alpha - \frac{p_n}{q_n} \mid = \sum_{k=n+1}^{\infty} 5^{-k^5} = \frac{1}{5^{(n+1)^5}} + \frac{1}{5^{(n+2)^5}} + \frac{1}{5^{(n+3)^5}} + \cdots \leq \frac{1}{5^{(n+1)^5}} + \frac{1}{5^{(n+2)(n+1)^4}} + \frac{1}{5^{(n+3)(n+1)^4}} + \cdots = (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^{(n+1)} + (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^{(n+2)} + (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^{(n+3)} + \cdots = (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^n \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^k = (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^n (-1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^k) = (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^{(n+1)^4}}} = (\frac{1}{5^{(n+1)^4}})^n \cdot \frac{5^{(n+1)^4}}{5^{(n+1)^4}-1} = \frac{1}{5^{(n-1)(n+1)^4}(5^{(n+1)^4}-1)}$

Entonces:

$$q_n \cdot \mid \alpha - \frac{p_n}{q_n} \mid \leq \frac{q_n}{5^{(n-1)(n+1)^4}\left(5^{(n+1)^4}-1\right)} \leq \frac{5^{n^5}}{5^{(n-1)(n+1)^4}\left(5^{(n+1)^4}-1\right)} = \frac{5^{2n^2+3n+1}}{5^{3n^4+2n^3}\left(5^{(n+1)^4}-1\right)} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

Así que por una de las proposiciones vistas en clases tenemos que α es irracional.

Supongamos que β es racional, de forma que podemos escribir: $\beta = \frac{a}{b}$ con a,b$\in Z$.

$\beta = \sqrt{3+\sqrt{\alpha}} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 3 + \sqrt{\alpha} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{a^2}{b^2} - 3 \Leftrightarrow \alpha = \underbrace{(\frac{a^2}{b^2} - 3)^2}_{racional}$

CONTRADICCIÓN. α no es racional.

Por lo tanto β es irracional.

Problema escrito por Almudena Delgado