5.5.5. *Demostrar que* $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{4q^2}$ *para todo par de enteros p, q.*

Observación previa: voy a considerar $q \neq 0$ para que el problema esté bien definido.

Sabemos que $\sqrt{2}$ es un número algebraico de orden 2, ya que es solución del siguiente polinomio irreducible con coeficientes en $\mathbb{Z}$:

$$P(x) = x^2 - 2$$

Ahora utilizaremos el **Teorema del Valor Medio**:

- Supongamos primero que $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2}$. Entonces, $\exists\ \zeta \in (\sqrt{2} - \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{2})$ tal que

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \cdot |P'(\zeta)| = |P(\sqrt{2}) - P(\frac{p}{q}))|$$

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \cdot 2|\zeta| = |\frac{p^2 - 2q^2}{q^2}| \geq \frac{1}{q^2}$$

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{2|\zeta|q^2}$$

  Además, como $|\zeta| \leq |\sqrt{2} + \frac{1}{2}| < 2 \implies \frac{1}{|\zeta|} > \frac{1}{2}$.

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{4q^2}$$

- Si $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{2}$, la desigualdad también se cumple. De hecho, $\frac{1}{4q^2} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

Por tanto, $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{4q^2}$ para todo p, q enteros, con $q \neq 0$.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.