5.5.3. *Demostrar que* $\sin 1$ *es irracional.*

El desarrollo de Taylor del seno es $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$, que evaluado en 1 nos da

$$\alpha = \sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \ldots$$

Supongamos que $\sin 1$ es racional, entonces $\alpha = \sin 1 = \frac{p}{q}$. Es claro que $q!\alpha \in \mathbb{Z}$. Escribamos $q!\alpha = A + B, A \in \mathbb{Z}$, entonces

$$B = \begin{cases} \pm\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \ldots\right) & si\, q\, es\, par \\ \pm\left(\frac{1}{(q+2)(q+1)} - \frac{1}{(q+4)\ldots(q+1)} + \ldots\right) & si\, q\, es\, impar \end{cases}$$

Pero en ambos casos tenemos que $0 < B < 1$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $q!\alpha \in \mathbb{Z}$ y por tanto $\sin 1$ debe ser irracional.

Problema escrito por Óscar Losada Suárez