5.5.2. *Demostrar que el logaritmo decimal de un racional positivo, o bien es entero, o bien es irracional.*

Solución: Veamos qué puede ser $\log_{10}(\frac{a}{b})$, con $(a,b)=1$ y $a,b>0$.

Supongamos que el logaritmo decimal de un racional positivo es otro racional, es decir: $\log_{10}(\frac{a}{b})=\frac{c}{d}$, con $(c,d)=1, d\neq 1$.

Esto implicaría, usando las propiedades del logaritmo, que: $d\log_{10}(\frac{a}{b})=c \Rightarrow \log_{10}(\frac{a^d}{b^d})=c$. Lo que significa que $10^c=\frac{a^d}{b^d}$.

Pero 10^c es un entero, por lo que $\frac{a^d}{b^d}$ también $\Rightarrow b^d|a^d$ ¡Contradicción!

Luego el logaritmo decimal de un racional positivo no puede ser un racional

Problema escrito por Julio Aroca