5.5.19. *Demostrar que los números* $\alpha = 0,12345678910111213...$ *y* $\beta = 0,2357111317192329...$ *son irracionales.*

Solución: Supongamos que alguno de ellos fuese racional. Entonces, sería un número racional periódico. Sea n la longitud del periodo. El número α contiene secuencias de 1's tan largas como queramos y secuencias de 2's tan largas como queramos. Por tanto, no puede ser periódico, luego α es irracional.

Por el postulado de Bertrand, sabemos que para cualquier número natural m hay un primo p que cumple $m \leq p \leq 2m$. Sea p un primo que aparece en la secuencia periódica de β, que cumpla $10^{kn-1} \leq p \leq 2 \cdot 10^{kn-1}$ para algún entero k. De nuevo, por el postulado de Bertrand, existe otro primo q que cumple $2 \cdot 10^{kn-1} \leq q \leq 4 \cdot 10^{kn-1}$. Por lo tanto, p y su siguiente primo tienen kn dígitos. Como ambos números están en la parte periódica y tienen un número de dígitos múltiplo de la longitud del periodo, en realidad eran el mismo número. Llegamos con esto a una contradicción, por lo que β es irracional.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen