5.5.17. *Calcular*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n\sqrt{3}-\left[n\sqrt{3}\right]+1}$$

Denotemos por L al límite del enunciado. Sea $f(x)=\frac{1}{x+1}$, tenemos que $L=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{x}f\left(\left(n\sqrt{3}\right)\right)$.

El Teorema 5.4.2 (H. Weyl) nos garantiza que la sucesión $\left\{\left(n\sqrt{3}\right)\right\}$ está uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$ ya que $\sqrt{3}$ es un número irracional pues es algebraico, pero de orden 2.

A su vez, sabemos que $f(x)$ es continua en $(-1,\infty)$, por lo que por el Lema 5.4.3 tenemos

$$L=\int_0^1 f\left(x\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\log\left(1+x\right)|_0^1=\log 2$$

Problema escrito por Óscar Losada Suárez