5.5.16. *Demostrar que existe un n tal que $[10000(n\pi)] = 2001$ donde $(n\pi)$ indica la parte fraccionaria de $n\pi$.*

Solución: $[10000(n\pi)] = 2001 \iff 2001 \leq 10000(n\pi) < 2002 \iff (n\pi) \in I = \left[\frac{2001}{10000}, \frac{2002}{10000}\right)$.

Como π es un número irracional, por el teorema de Weyl, la sucesión $(n\pi)$ está uniformemente distribuída en $[0,1]$. Por tanto:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_I((n\pi)) = |I| = \frac{1}{10000}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \chi_I((n\pi)) = +\infty$$

Hemos probado que en el intervalo I hay infinitos números de la forma $(n\pi)$, y equivalentemente, que existen infinitos enteros que cumplen la condición enunciada.

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen