5.5.14. *Demostrar que la sucesión: parte fraccionaria de* $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ *no está uniformememnte distribuida.*

Solución: En primer lugar, recordemos de nuestro curso de Matemática Discreta que se cumplía la siguiente identidad ($F_n =$ "n-ésimo número de Fibonacci"):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para los olvidadizos, veamos una prueba rápida:

Denotemos, para mayor limpieza, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\tilde{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Nótese que tanto ϕ como $\tilde{\phi}$ son soluciones de la ecuación $x^2 = x + 1$. Luego, multiplicando recursivamente (sería análogo para $\tilde{\phi}$), tenemos:

$$\begin{gathered} \phi^2 = \phi + 1 \\ \phi^3 = \phi(\phi+1) = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1 \\ \phi^4 = \phi(2\phi+1) = 2\phi^2 + \phi = 3\phi + 2 \\ \vdots \\ \phi^n = F_n\phi + F_{n-1}, \quad \tilde{\phi}^n = F_n\tilde{\phi} + F_{n-1} \end{gathered} \tag{1}$$

Luego, restando ambas igualdades y despejando F_n, tenemos:

$$F_n = \frac{\phi^n - \tilde{\phi}^n}{\phi - \tilde{\phi}} = \frac{\phi^n - \tilde{\phi}^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\phi}^n \qquad \square$$

Vamos con la prueba del ejercicio. Para empezar, nótese que por la igualdad probada anteriormente, y por (1), tenemos que

$$\langle \phi^n \rangle = \langle F_n\phi \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\phi}^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\phi}^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\phi}^n\phi \rangle =$$
$$= \langle F_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{\phi}^n(\tilde{\phi} - \phi) \rangle = \langle F_{n+1} - \tilde{\phi}^n \rangle = \langle -\tilde{\phi}^n \rangle$$

y como resulta que $|\tilde{\phi}| < 1$, se sigue que para cierto N suficientemente grande, $\langle \phi^n \rangle = \langle -\tilde{\phi}^n \rangle \in \left[0, \frac{1}{10}\right) \cup \left[\frac{9}{10}, 1\right)$ si $n \geq N$; y por consiguiente $\langle \phi^n \rangle$ no puede tener distribución uniforme en $[0, 1)$.

Problema escrito por Miguel Monsalve