5.5.13 *Demostrar que la sucesión* $\{(\log n)\}$ *no está uniformemente distribuida.*

Solución: Sabemos que la sucesión $a_n = (\log n)$ (la parte fraccionaria) está uniformemente distribuida si y sólo si el siguiente límite es 0 para todo $m \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m a_k}.$$

Por tanto no hay más que calcular ese límite y ver que no es 0. Para empezar, está claro que:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m a_k} = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m (\log k)} = \sum_{k=1}^{n} k^{2\pi i m}.$$

Para tener una mejor aproximación de esto sumamos por partes con $a_n = 1$ y $f(t) = t^{2\pi i m}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2\pi i m} = n^{2\pi i m} n - \int_1^n \lfloor t \rfloor 2\pi i m t^{2\pi i m - 1} dt.$$

De nuevo, queremos *quitar* de la integral la parte entera, para ello, sumamos y restamos $t - 1/2$ (el $-1/2$ realmente es irrelevante, pero así se obtiene una fórmula más simétrica). Llegamos sin mucho esfuerzo a que si $f(t) = t^{2\pi i m}$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2\pi i m} = \int_1^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n P_1(t) f'(t) dt$$

donde $P_1(t) = t - \lfloor t \rfloor - 1/2$. Ahora sólo hay que resolver (o acotar) esas integrales. La primera será la que dé el término principal:

$$\int_1^n f(t)dt = \int_1^n t^{2\pi i m} dt = \frac{n^{2\pi i m + 1} - 1}{2\pi i m + 1}.$$

Como además $P_1(t) = O(1)$ podemos acotar el término de error integral por:

$$\int_1^n P_1(t) f'(t) dt \ll \int_1^n t^{-1} dt \ll \log n.$$

Con esto llegamos $(f(1), f(n) = O(1))$ a:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2\pi im} = \frac{n^{2\pi im+1}}{2\pi im + 1} + O(\log n).$$

Si recordamos lo que buscábamos era dividir esto por n y ver si ese límite da 0. Pero esto no ocurre ya que para empezar, la parte del error sí que tiende a 0 pero sin embargo $n^{2\pi im}$ oscila al hacer tender $n \to \infty$, por tanto el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{2\pi im}$ no existe lo que implica que $(\log n)$ no está uniformemente distribuida.

Problema escrito por Diego González Sánchez.