5.5.11. *En el primer examen saco un* $8\,|\sin 1|$, *en el segundo* $8\,|\sin 2|$, *en el tercero* $8\,|\sin 3|$, *y así sucesivamente. Demostrar que si el número de exámenes es sufucientemente grande, la media me saldrá aprobado.*

Queremos probar que $\overline{X} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} 8\,|\sin x| \geq 5$.

Observamos que dada la periodicidad de la función *sin*x y dado que gracias al Teorema 5.4.2 (H. Weyl) sabemos que la sucesión $\{(n\theta)\}, \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ está uniformemente distribuida en $[0,1]$, tenemos $\overline{X} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} 8\left|\sin\left(\left(\frac{x}{\pi}\right)\pi\right)\right|$.

Llamamos a $f(x) := 8\,|\sin x\pi|$ y a $a_k := \left\{\left(\frac{x}{\pi}\right)\right\}$ y podemos aplicar el Lema 5.4.3 para calcular el valor de $\overline{X}$ como la integral de f en $[0,1]$, y obtenemos así lo que queríamos

$$\overline{X} = \int_0^1 8\,|\sin x\pi|\,dx = 8\int_0^1 \sin x\pi = 8\left(-\frac{1}{\pi}\cos x\pi\,\Big|_0^1\right) = 8\frac{1+1}{\pi} \approx 5.09 > 5$$

Problema escrito por Óscar Losada Suárez