5.5.1. *Demostrar que* $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$ *es irracional.*

Demostrémoslo por reducción al absurdo. Para ello, supongamos que es racional, esto es, que existen p, q $\in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$ de tal forma que:

$$\frac{p}{q} = \sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$$

$$p = q\sqrt[3]{2} - q\sqrt{2}$$
$$(p + q\sqrt{2})^3 = (q\sqrt[3]{3})^3$$
$$p^3 + 6pq^2 + (3p^2q + 2q^3)\sqrt{2} = 3q^3$$

Y ahora despejamos $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \frac{3q^2 - p^3 + 6pq^2}{3p^2q + 2q^3}$$

Puesto que los enteros forman un anillo, y los anillos son cerrados con respecto a la suma y el producto, $3q^2 - p^3 + 6pq^2$ y $3p^2q + 2q^3 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p,\ q \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $\frac{3q^2-p^3+6pq^2}{3p^2q+2q^3} \in \mathbb{Z}$, lo que nos hace llegar a una contradicción, ya que el Teorema 5.0.1 nos asegura que $\sqrt{2}$ es irracional.

Esto quiere decir que nuestro supuesto era falso y que, por consiguiente, $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$ es irracional.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.