4.3.9. *Probar que $x^4 - y^4 = z^2$ no tiene soluciones enteras con $yz \neq 0$.*

Solución: Vamos a proceder por el método del descenso infinito. Si existe una solución, entonces existe alguna con x mínima. Llamemos (x,y,z) dicha solución, que cumple $(x^2)^2 = z^2 + (y^2)^2$, con $(x, y, z) = 1$. Por el teorema 4.2.1 la solución debe ser de una de las siguientes formas:

$$\begin{cases} y^2 = n^2 - m^2 \\ z = 2nm \\ x^2 = n^2 + m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = n^2 - m^2 \\ y^2 = 2nm \\ x^2 = n^2 + m^2 \end{cases}$$

Siendo n, m coprimos y de distinta paridad.

Si la solución es de la primera forma, tendríamos que $n^4 = m^4 + (xy)^2$. Pero dado que $m^2 > 0$, $x > n$ y encontraríamos una solución menor. Luego la solución no era mínima, por lo que no puede ser de la primera forma.

Si es de la segunda forma, podemos escribir $(\frac{y}{2})^2 = \frac{nm}{2}$. Supongamos SPDG que m es el número par y n el impar (si no, podemos realizar el mismo argumento intercambiando los papeles de las variables). Sea $\tilde{m} = \frac{m}{2}$. Como $(n, \tilde{m}) = 1$, y su producto es un cuadrado, ambos tienen que ser cuadrados. Digamos $n = a^2$, $\tilde{m} = b^2$. Por lo tanto, $x^2 = a^4 + 4b^4$, y hemos encontrado una solución de una ecuación que no tiene solución por el ejercicio 4.3.8. Queda así probado que $x^4 - y^4 = z^2$ no tiene soluciones enteras con $yz \neq 0$

Problema escrito por Rubén García-Valcárcel Sen