**4.3.8.** *Probar que* $x^4 + 4y^4 = z^2$ *no tiene soluciones con* $xy \neq 0$.

**Solución:**
Supongamos que la ecuación $x^4 + 4y^4 = z^2$ tiene alguna solución.

De todas las soluciones que puede tener, escogemos la solución mínima, es decir, escogemos $z = u$, con $u$ el menor entero positivo tal que $x^4 + 4y^4 = u^2$ para algún par $x, y$.

Expresamos $x^4 + 4y^4 = z^2$ como terna pitagórica:

$$(x^2)^2 + (2y^2)^2 = z^2$$

Entonces, como $u$ es la solución mínima, tenemos que $(x^2, 2y^2) = 1$.

En caso contrario: $(x, y) = d \Rightarrow (x^2, y^2) = d^2$.
Entonces, hay dos opciones para $(x^2, 2y^2)$:

- $(x^2, 2y^2) = d^2$. En este caso:

$$\left(\frac{x^2}{d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{y^2}{d^2}\right)^2 = \left(\frac{u}{d^2}\right)^2$$

- $(x^2, 2y^2) = 2d^2$. En este caso, escribimos $x$ como $x = 2x'$, y obtenemos que:

$$16\left(\frac{x'^2}{d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{y^2}{d^2}\right) = 4\left(\frac{u}{d^2}\right)^2 \Leftrightarrow 4\left(\frac{x'^2}{d^2}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{d^2}\right) = \left(\frac{u}{d^2}\right)^2$$

  En caso de que $(2\frac{x'^2}{d^2}, \frac{y^2}{d^2}) = 2$, seguimos simplificando de la misma forma hasta que $(x_0^2, 2y_0^2) = 1$.

Entonces, tenemos que, como $(x^2, 2y^2, u)$ es una terna pitagórica, entonces, se cumple lo siguiente:

$$\begin{cases} x^2 = n^2 - m^2 \\ y^2 = mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$$

donde $(m, n) = 1$, y $m$ y $n$ tienen distinta paridad.

Supongamos que $n$ es par. Entonces:

$$x^2 = n^2 - m^2 \equiv -1 \pmod 4$$

Pero esto es imposible, dado que $-1$ no es residuo cuadrático módulo 4.

Por tanto, $n$ ha de ser impar.
Ahora,

$$y^2 = mn \Rightarrow n = a^2, m = b^2$$

Entonces, $x^2 = n^2 - m^2 = a^4 - b^4 \Leftrightarrow x^2 + b^4 = a^4$.
Obtenemos de nuevo una terna pitagórica, que satisface:

$$\begin{cases} x = r^2 - s^2 \\ b^2 = 2rs \\ a^2 = r^2 + s^2 \end{cases}$$

con $(r, s) = 1$, y $r$ y $s$ con distinta paridad.

Supongamos que $r$ es par, y $s$ impar (en caso contrario, obtenemos lo mismo):

Entonces,

$$b^2 = 2rs \Rightarrow 2r = c^2, s = k^2$$

De aquí, tenemos que

$$a^2 = \left(\frac{c^2}{2}\right)^2 + \left(k^2\right)^2$$

Como $c^2$ es par, entonces, $c^2 = 4l^2$.
Sustituyendo:

$$a^2 = \left(\frac{4l^2}{2}\right)^2 + k^4 = 4l^4 + k^4$$

Pero $0 < a < u$, luego llegamos a una contradicción.

**Conclusión:** Las únicas soluciones enteras de la ecuación $x^4 + 4y^4 = z^2$ aparecen cuando $xy = 0$.

*Problema escrito por Javier Sanz-Cruzado Puig*