4.3.6. *Hallar todas las soluciones en enteros positivos de la ecuación* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$.

Solución: Vamos a buscar soluciones con $(x, y, z) = 1$ ya que si hubiera un divisor común d a todos ellos puedo multiplicar por d^2 para cancelarlo. Del ejercicio anterior sabemos que las soluciones a esta ecuación vienen dadas por:

$$\begin{cases} z^2 = m(n-m) \\ x^2 = n(n-m) \\ y^2 = nm \end{cases}$$

donde $(n, m) = 1$.

De la última ecuación, como n y m son coprimos tenemos que ambos deben ser cuadrados, digamos $n = u^2$ y $m = w^2$. Igualmente, como $x^2 = n(n-m)$ y $(n, n-m) = 1$ (se ve restando) tenemos que $n - m$ también debe ser un cuadrado, pongamos $n - m = u^2 - w^2 = t^2$. Por tanto lo que tenemos aquí es una terna pitagórica ($u^2 = w^2 + t^2$) que además es primitiva (como $(n, m) = 1$ es trivial que $(u, w) = 1$). Esto quiere decir que

$$\begin{cases} t = r^2 - s^2 \\ w = 2rs \\ u = r^2 + s^2 \end{cases}$$

para ciertos r y s con $(r, s) = 1$ y de distinta paridad. Siendo precisos esto supone ya que w es par y que t es impar lo cual a priori no abarca todas las soluciones, pero como el problema es simétrico al intercambiar la x por la y al final este detalle no importa y lo que obtenemos son soluciones permutadas.

Y con esta información basta despejar. Como $x = n(n-m) = u^2t^2$ si además suponemos que x es positivo (para no andar acarreando signos innecesarios) tenemos que $x = ut = (r^2+s^2)(r^2-s^2)$. Del mismo despejamos la y y la z para llegar a:

$$\begin{cases} x = (r^2 + s^2)(r^2 - s^2) \\ y = 2rs(r^2 + s^2) \\ z = 2rs(r^2 - s^2) \end{cases}$$

donde $(r, s) = 1$ y de distinta paridad. Como he dicho antes, con esto llegamos a que x es impar, lo cual no es necesariamente cierto. Si hubiéramos escogido el otro orden para la terna pitagórica hubiérmos llegado a una solución igual pero con los papeles de x e y intercambiados. Y por supuesto, esa solución la hemos calculado cuando $(x, y, z) = 1$, para obtener la solución general tenemos que multiplicarlo todo por una constante K.

Problema escrito por Diego González Sánchez.