4.3.5. *Hallar todas las soluciones en enteros positivos de la ecuación* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.

Solución: Cualquier solución cumple que si pasamos la z multiplicando, llegamos a $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 1$ y si pensamos esto como números racionales lo que tenemos es $\frac{z}{x} = \frac{m}{n}$ donde $(m, n) = 1$ (además no son ambos igual a 1 ya que si no llegamos a contradicción con $z/y = 0$). Despejando ahora llegamos a que $\frac{z}{y} = \frac{n-m}{n}$. Lo que nos gustaría es decir que z es el "común numerador" para concluir que $z = m(n - m)$ (o algo similar). Por cómo hemos cogido m y n (coprimos) es trivial ver que $(n - m, n) = 1$ ya que si hubiera un factor común p, entonces p dividiría a la diferencia y por tanto $p|m$. Con esto en mente, teníamos:

$$nz = xm \quad \text{y} \quad nz = y(n - m).$$

Como $(n, m) = 1$, de la primera ecuación deducimos que $m|z$, y de la segunda, como $(n - m, n) = 1$ tenemos que $n - m|z$. Además, por un argumento análogo $(n - m, m) = 1$ y por tanto $m(n - m)|z$. Y esto prueba que $z = m(n - m)t$ para algún $t \in \mathbb{Z}$. Metiendo esto en $\frac{z}{x} = \frac{m}{n}$ llegamos a que la solución debe de tener la forma de

$$\begin{cases} z = tm(n - m) \\ x = tn(n - m) \\ y = tnm \end{cases}$$

donde $(m, n) = 1$ y $t \in \mathbb{Z}$ (y $m, n, n - m \neq 0$). Si lo que queremos es que la solución esté en enteros positivos, es claro que de esa fórmula hay que pedir además que $n > m \geq 0$ y $t > 0$.

Reciprocamente es trivial ver que cualquier terna como la que hemos descrito satisface la ecuación.

Problema escrito por Diego González Sánchez.