4.3.4. *Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación* $x^2+y^2=z^4$ *con (x,y,z)=1*

Solución: Expresemos la ecuación de la siguiente manera: $x^2+y^2=(z^2)^2$, y hallemos sus soluciones:

- $x=(n^2-m^2)t$
- $y=2mnt$
- $z^2=(m^2+n^2)t$

con $(n,m)=1, t\in\mathbb{Z}$. Nuestro único problema ahora consiste en encontrar una solución adecuada de z^2. Esto nos da dos posibilidades:

- m^2+n^2 es un cuadrado: $\Rightarrow$ m y n forman parte de una terna pitagórica $\Rightarrow$ basta tomar $t=b^2$, con $b\in\mathbb{N}$. Como $(x,y,z)=1$, no hay otra posibilidad más que la de coger $t=1$:

  Por ejemplo, para $n=4, m=3$:

  - $x=7$
  - $y=24$
  - $z^2=25$

- m^2+n^2 no es un cuadrado, luego debemos completar cuadrados: $\Rightarrow$ $t=(m^2+n^2)b^2$, con $b\in\mathbb{N}$. Sin embargo, mediante este proceso nos es imposible hallar una solución en la que $(x,y,z)=1$, porque $(x,y,z)=m^2+n^2$.

Luego nuestras soluciones son de la forma (x,y,z), donde:

- $x=n^2-m^2$
- $y=2mn$
- $z^2=m^2+n^2$, con $m^2+n^2=a^2$ para algún $a\in\mathbb{N}$.

Si desarrollamos m y n como otra terna pitagórica, tenemos que:

- $x=n^2-m^2=(p^2-q^2)^2-(2pq)^2=-p^4+6p^2q^2-q^4$
- $y=2mn=2(p^2-q^2)(2pq)=4(p^3q-q^3p)$
- $z^2=m^2+n^2=(p^2+q^2)^2\Rightarrow z=p^2+q^2$, con $(p,q)=1$

Problema escrito por Julio Aroca