4.3.4. *Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación* $x^2 + y^2 = z^4$.

Solución:

Por el Teorema 4.2.1, todas las soluciones primitivas de $x^2 + y^2 = (z^2)^2$ vienen dadas por la fórmula:

$$\begin{cases} x = (n'^2 - m'^2) \\ y = 2m'n' \\ z^2 = (n'^2 + m'^2) \end{cases}$$

donde n', m' son enteros primos entre sí y de distinta paridad.

De la tercera ecuación se deduce que m' y n' son, a su vez, las dos primeras componentes de una terna pitagórica. Por tanto, sean m y n dos enteros coprimos y con distinta paridad, podemos conseguir las soluciones primitivas mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{cases} x = (2mn)^2 - (n^2 - m^2)^2 = 6m^2n^2 - n^4 - m^4 \\ y = 2(n^2 - m^2)(2mn) = 4mn^3 - 4m^3n \\ z = \sqrt{(n^2 - m^2) + (2mn)^2} = \sqrt{n^4 + m^4 - 2n^2m^2 + 4m^2n^2} = \sqrt{(n^2 + m^2)^2} = n^2 + m^2 \end{cases}$$

Finalmente, es sencillo observar que para conseguir el resto de soluciones, basta con multiplicar z por un entero t, así como x e y por el cuadrado de ese mismo entero.

$$\begin{cases} x = (6m^2n^2 - n^4 - m^4)t^2 \\ y = (4mn^3 - 4m^3n)t^2 \\ z = (n^2 + m^2)t \end{cases}$$

Por ejemplo, si tomamos m=1, n=3, t=1, obtenemos la terna de soluciones (-28, 96, 10), mientras que si m=2, n=3, t=5, los resultados son: x=2975, y=3000, z=325.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.