4.3.3. *Demostrar que si un triangulo rectangulo tiene lados de longitud entera entonces la suma de los lados divide al producto de los mismos.*

Solución: En virtud del Teorema de Pitagoras sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$ los lados del triangulo. Por Teorema 4.2.1 sabemos que las solucione son de la forma

$$\begin{cases} a = (n^2 - m^2)t \\ b = 2mnt \\ c = (n^2 + m^2)t \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{Z}$, y n, m son enteros primos entre sí y de distinta paridad. La suma es de la forma

$$a + b + c = t(n^2 - m^2 + 2mn + n^2 + m^2) = 2tn(n + m)$$
$$abc = 2mnt^3(n^2 + m^2)(n^2 - m^2) = 2mnt^3(n^4 - m^4).$$

Como $2tn \mid 2mnt^3$, basta con ver que $(n + m)$ divide a $(n^4 - m^4)$. Esto es cierto, ya que $n^4 - m^4 = (n+m)(n^3 - n^2m + m^2n - m^3)$. Por tanto, $a+b+c \mid abc$.

Problema escrito por Patrizio Guagliardo