

**4.3.2** *Demostrar que la ecuación  $x^2 + y^2 = 7z^2$  no tiene soluciones en enteros positivos.*

**Solución:**

Mirando la ecuación módulo 7, tenemos que  $x$  e  $y$  tienen que ser múltiplos de 7, ya que los posibles restos cuadráticos son 0, 1, 2 y 4.

Si existe solución en los enteros positivos tomemos aquella con  $z$  mínimo. Por la observación anterior podríamos sacar factor común y comenzar el método de descenso:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 7z^2 \\(7x_0)^2 + (7y_0)^2 &= 7z^2 \\7x_0^2 + 7y_0^2 &= z^2 \\7x_0^2 + 7y_0^2 &= (7z_0)^2 \\x_0^2 + y_0^2 &= 7z_0^2\end{aligned}$$

Como  $z_0 < z$ , obtenemos una contradicción por lo que no existen soluciones en los enteros positivos.

*Problema escrito por Federico Alfaro.*