4.3.1. *Hallar todas las ternas de cuadrados en progresión aritmética.*

Solución:

El problema es equivalente a encontrar las soluciones en los enteros de $x^2 + y^2 = 2z^2$.

Observemos que buscar las soluciones enteras de $x^2 + y^2 = 2z^2$ es equivalente a buscar las soluciones en los racionales de $x_1^2 + y_2^2 = 2$, donde hemos hecho $x_1 = \frac{x}{z}$, $y_1 = \frac{y}{z}$.

Esto es, habremos de calcular los puntos (x, y) de coordenadas racionales sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Mediante simple inspección es fácil comprobar que $(x_0, y_0) = (1, 1) \in \mathbb{Q}^2$ está sobre la circunferencia. Ahora trazamos una recta que pase por dicho punto y con pendiente $r \in \mathbb{Q}$. Esta recta cortará a la circunferencia en otro punto (x_0', y_0')

Sea $y - 1 = r(x - 1)$ la ecuación de dicha recta. La sustituímos en la ecuación de la circunferencia y resulta:

$$x^2 + (1 + r(x - 1))^2 = 2$$

Esta ecuación de segundo grado tendrá como soluciones x_0 y x_0'. Ahora bien, la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado con coeficientes racionales es racional. Por tanto, como $x_0 = 1$ es racional, x_0' y y_0' también serán racionales.

$$x^2 + (1 + r(x - 1))^2 = 2$$
$$x^2 + 1 + r^2(x + 1)^2 + 2r(x - 1) = 2$$
$$x^2 + 1 + r^2x^2 + r^2 - 2r^2x + 2rx - 2r = 2$$
$$(1 + r^2)x^2 + (2r - 2r^2)x + r^2 - 2r - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2r + 2r^2 \pm \sqrt{((2r - 2r^2)^2 - 4(1 + r^2)(r^2 - 2r - 1))}}{2(1 + r^2)} =$$

$$= \frac{-2r + 2r^2 \pm \sqrt{(4r^2 + 4r^4 - 8r^3 - 4r^r + 8r + 4 - 4r^4 + 8r^3 + 4r^2)}}{2r + 2r^2} =$$

$$= \frac{-2r + 2r^2 \pm \sqrt{8r + 4r^2 + 4}}{2 + 2r^2} = \frac{-2r + 2r^2 \pm (2 + 2r)}{2 + 2r^2} = \begin{cases} \frac{-2r+2r^2+2+2r}{2+2r^2} = 1 \\ \frac{-2r+2r^2-2-2r}{2+2r^2} = \frac{2r^2-4r-2}{2+2r^2} = \frac{r^2-2r-1}{1+r^2} \end{cases}$$

Definimos $r = \frac{m}{n}$ con m y n enteros coprimos entre sí. Por tanto:

$$\frac{r^2 - 2r - 1}{1 + r^2} = \frac{\frac{m^2}{n^2} - 2\frac{m}{n} - 1}{\frac{m^2}{n^2} + 1} = \frac{m^2 - n^2 - 2mn}{m^2 + n^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta, obtenemos:

$$y'_0 = 1 + \frac{m}{n}(\frac{-2n^2 - 2mn}{m^2 + n^2}) = 1 + (\frac{-mn - 2m^2}{m^2 + n^2}) = \frac{-2mn - m^2 + n^2}{m^2 + n^2}$$

Como queremos que las soluciones sean primitivas, además de (m, n)=1, m y n tienen que tener distinta paridad. El resto de las soluciones vienen de multiplicar x, y, z por un mismo entero t. Siendo así, todas las soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = 2z^2$ vienen dadas por la fórmula:

$$\begin{cases} x = (m^2 - n^2 - 2mn)t \\ y = (-2mn - m^2 + n^2)t \\ z = (m^2 + n^2)t \end{cases}$$

Por ejemplo, si tomamos m=2, n=3, t=1, obtenemos

$$\begin{cases} x = 289 \\ y = 49 \\ z = 169 \end{cases}$$

Si elevamos al cuadrado obtemos la terna (289, 49, 169), cuyos términos siguen una distribución aritmética de diferencia 120.

A modo de último ejemplo, si tomamos m=1, n=2, t=2, obtenemos

$$\begin{cases} x = -14 \\ y = -2 \\ z = 10 \end{cases}$$

Si elevamos al cuadrado obtemos la terna (196, 4, 100), cuyos términos siguen una distribución aritmética de diferencia 96.

Problema escrito por Jesús de los Nietos Valle.