3.7.4. *Hallar el resto al dividir el número* 999 998 997 . . . 003 002 001 000 *entre* 13

Solución: Veamos como son las potencias de 1000 $mod(13)$:

$1000 \equiv -1 \ mod(13) \Rightarrow 1000^2 \equiv 1 \ mod(13) \Rightarrow$

$$1000^k \equiv \left\{ \begin{array}{ll} -1 & si \quad k \ impar \\ \ \ 1 & si \quad k \ par \end{array} \right.$$

Una vez comprobado esto, es fácil ver que nuestro número: 999 998 997 . . . 003 002 001 000 equivale a $\sum_{i=0}^{999} 1000^i i$, lo que en $mod(13)$ es:

$$\sum_{i=0}^{999} (-1)^i i \equiv 0 - 1 + 2 - 3 + 4 \cdots - 999.$$

Si agrupamos en términos: $(0-1)+(2-3)+\cdots+(998-999)$ tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{999} (-1)^i i \equiv \sum_{i=1}^{500} -1 \equiv -500 \ mod(13) \equiv 7 \ mod(13).$$

Problema escrito por Julio Aroca