3.7.34. *Probar que* $\sum_{x=1}^{p}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right)=-1$ *si* p *es cualquier primo impar.*

Solución: Para empezar, como $\left(\frac{p}{p}\right)=0$ podemos tomar la suma sólo hasta $p-1$. Lo primero que notamos es que ese 1 que está sumando se puede sustituir por cualquier otra cifra coprima con p. La razón de esto es que, si consideramos el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$, tenemos que cualquier elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ actua por multiplicación sobre el grupo, lo que quiere decir que para recorrer todos sus elementos, para cualquier i podemos tomar xi para $x=1,2,...,p-1$. Llamemos

$$A=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right).$$

Ahora, por la observación que hemos hecho antes tenemos que para cualquier i

$$A=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{ix}{p}\right)\left(\frac{ix+1}{p}\right)$$

ya que $i,2i,...,(p-1)i$ lo que hace es recorrer todos los elementos de $\mathbb{Z}_p^*$ pero en otro orden. Usando que hemos elegido $i=1,...,p-1$ sea $j\in\mathbb{Z}_p^*$ su inverso multiplicativo. Usando que el símbolo de Legendre es completamente multiplicativo tenemos que

$$A=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{ix}{p}\right)\left(\frac{ix+ij}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{i}{p}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+j}{p}\right)=\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+j}{p}\right).$$

Como el i anterior era arbitrario entonces el j también es arbitrario (entre 1 y $p-1$). El caso $j=0$ es trivial pero muy importante:

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x}{p}\right)=p-1.$$

Ahora vamos a sumarlos todos, incluido el caso $j=0$:

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right)+...+\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+p-1}{p}\right)+\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)^2=A(p-1)+p-1.$$

Sin embargo si en esa primera igualdad sacamos factor común llegamos a:

$$\sum_{x=1}^{p-1}\left(\frac{x}{p}\right)\underbrace{\left(\left(\frac{x+1}{p}\right)+...+\left(\frac{x+p-1}{p}\right)+\left(\frac{x}{p}\right)\right)}_{=0}.$$

En cuanto probemos esa igualdad de ahí abajo ya habremos acabado. Si nos fijamos, cogemos un x cualquiera y lo que estamos haciendo es sumar sobre todos los restos de $\mathbb{Z}_p$ (incluido el 0). Por tanto lo que queremos probar es que

$$\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{i}{p}\right)=0.$$

Y probar esto último se puede hacer de varias maneras. La primera es decir, como p es primo impar, de los $p-1$ resto coprimos con p la mitad serán residuos cuadráticos y la otra mitad no, por tanto al sumar todos ellos da 0. Otro argumento es proceder como antes y hacer actuar un elemento por multiplicación. De la suma anterior nos olvidamos del 0 (ya que $\left(\frac{0}{p}\right)=0$) y sea $a\in\mathbb{Z}_p^*$ un elemento que no sea residuo cuadrático (debe existir ya que $p>2$), tal que $\left(\frac{a}{p}\right)\neq 1$. De nuevo:

$$\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{i}{p}\right)=\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{ai}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{i}{p}\right).$$

Despejando llegamos a $\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{i}{p}\right)(1-\left(\frac{a}{p}\right))=0$ y como $\left(\frac{a}{p}\right)\neq 1$ entonces $\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{i}{p}\right)=0$. En cualquier caso llegamos a

$$A(p-1)+p-1=0$$

de lo que se concluye que $A=-1$.

Problema escrito por Diego González Sánchez.